1 k を定数とする。2 次関数 $y=x^2+2kx+2k^2+3k+5$ のグラフの頂点の座標を k の式で表すと $^{ア}\boxed{}$ であり，この頂点の y 座標の値が最小となる k の値は $^{イ}\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$\left(-k,\ k^2+3k+5\right)$　　(イ)　$-\dfrac{3}{2}$

解説

$y=x^2+2kx+2k^2+3k+5=(x+k)^2+k^2+3k+5$

よって，グラフの頂点の座標は　$^{ア}(-k,\ k^2+3k+5)$

また，頂点の y 座標は $k^2+3k+5=\left(k+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$ であるから，y 座標の値が最小となる k の値は　$k={}^{イ}-\dfrac{3}{2}$

2 a は $-2<a<1$ を満たす実数とする。関数

$$y=-x^2-2ax+a^2-2a+1\ (-1\leqq x\leqq 2)\ \cdots\cdots①$$

について考える。関数 ① は $x=^{ア}\boxed{}$ のとき最大値 $^{イ}\boxed{}$ をとる。関数 ① の最大値が 5 となるとき，a の値は $a=^{ウ}\boxed{}$ である。また，関数 ① の最小値が負であるとき，a のとり得る値の範囲は $^{エ}\boxed{}<a<^{オ}\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$-a$　　(イ)　$2a^2-2a+1$　　(ウ)　-1　　(エ)　$3-2\sqrt{3}$　　(オ)　1

解説

$f(x)=-x^2-2ax+a^2-2a+1$ とおくと

$f(x)=-(x+a)^2+2a^2-2a+1$

$-2<a<1$ であるから　$-1<-a<2$

よって，関数 ① は，$x={}^{ア}-a$ のとき最大値 $f(-a)={}^{イ}2a^2-2a+1$ をとる。

関数 ① の最大値が 5 となるとき

$2a^2-2a+1=5$

整理すると　$a^2-a-2=0$　すなわち　$(a+1)(a-2)=0$

$-2<a<1$ から，$a={}^{ウ}-1$ である。

また，関数 ① の最小値が負であるとき，x の範囲 $-1\leqq x\leqq 2$ の中央の値が $x=\dfrac{1}{2}$ であるから

[1]　$-a\leqq\dfrac{1}{2}$　すなわち　$-\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ のとき

最小値は　$f(2)=a^2-6a-3$

よって，$a^2-6a-3<0$ から　$3-2\sqrt{3}<a<3+2\sqrt{3}$

$-\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ との共通範囲を求めて　$3-2\sqrt{3}<a<1$

[2]　$-a>\dfrac{1}{2}$　すなわち　$-2<a<-\dfrac{1}{2}$ のとき

最小値は，$f(-1)=a^2$ であるが，$a^2<0$ を満たす a は存在しない。

[1]，[2] から，a のとり得る値の範囲は，${}^{エ}3-2\sqrt{3}<a<{}^{オ}1$ である。

3 a を負の定数とする。2 次関数 $f(x)=x^2+(a+2)x+a^2$ のグラフが x 軸に接するとき，次の問いに答えよ。

(1)　定数 a の値を求めよ。

(2)　$f(x)=1$ を満たす x をすべて求めよ。

(3)　x が $-1\leqq x\leqq 2$ を満たすとき，2 次関数 $y=f(x)$ の値域を求めよ。

解答　(1)　$a=-\dfrac{2}{3}$　　(2)　$x=\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{5}{3}$　　(3)　$0\leqq y\leqq\dfrac{64}{9}$

解説

(1)　2 次方程式 $x^2+(a+2)x+a^2=0$ の判別式を D とすると

$D=(a+2)^2-4a^2=-3a^2+4a+4$

$D=0$ であるから　$3a^2-4a-4=0$

すなわち　$(a-2)(3a+2)=0$

これを解くと　$a=2,\ -\dfrac{2}{3}$　　$a<0$ であるから　$a=-\dfrac{2}{3}$

(2)　$f(x)=x^2+\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{9}=\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2$ であるから　$\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2=1$

よって　$x+\dfrac{2}{3}=\pm1$　　したがって　$x=\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{5}{3}$

(3)　$f(x)$ は $x=-\dfrac{2}{3}$ で最小値 0，$x=2$ で最大値 $\dfrac{64}{9}$ をとるから　$0\leqq y\leqq\dfrac{64}{9}$

$\boxed{4}$ a，b を定数とし，$f(x)=x^2+2ax+b$ とする。放物線 $y=f(x)$ が点 $(1,\ 1)$ を通る。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)の範囲にあるとき，$y=f(x)$ の頂点の y 座標が最大になるときの a の値とそのときの頂点の座標を求めよ。

$\boxed{解答}$　(1)　$b=-2a$　　(2)　$-2\leqq a\leqq 0$　　(3)　$a=-1$，$(1,\ 1)$

解説

(1)　放物線 $y=f(x)$ は点 $(1,\ 1)$ を通るから　　$1=1+2a+b$

したがって　　$b=-2a$

(2)　(1)の結果から　　$f(x)=x^2+2ax-2a=(x+a)^2-a^2-2a$

よって，放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標は　　$(-a,\ -a^2-2a)$

放物線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ となるための条件は，放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 0 以上になることである。

ゆえに　　$-a^2-2a\geqq 0$　　　すなわち　　$a(a+2)\leqq 0$

よって，求める a の範囲は　　$-2\leqq a\leqq 0$

(3)　$g(a)=-a^2-2a$ $(-2\leqq a\leqq 0)$ とおく。

$$g(a)=-(a+1)^2+1$$

よって，$g(a)$ は，$a=-1$ で最大値 1 をとる。

また，このときの頂点の座標は　　$(1,\ 1)$

$\boxed{5}$ a を 4 以上の定数とし，$f(x)=(x-a)(x-4)+4$ とおく。

(1)　2次関数 $y=f(x)$ の最小値は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}a^2+\boxed{エ}a$ である。

(2)　2次関数 $y=f(x)$ の $a-2\leqq x\leqq a+2$ における最大値は $\boxed{オ}a$ である。

また，2次関数 $y=f(x)$ の $a-2\leqq x\leqq a+2$ における最小値は

$4\leqq a\leqq\boxed{カ}$ のとき，$\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}a^2+\boxed{エ}a$ であり，

$\boxed{カ}<a$ のとき，$\boxed{キク}a+\boxed{ケコ}$ である。

$\boxed{解答}$　$\dfrac{(アイ)}{(ウ)}a^2+(エ)a$　$\dfrac{-1}{4}a^2+2a$　　(オ)　2　　(カ)　8

(キク)a＋(ケコ)　$-2a+16$

解説

(1)　$f(x)$ を変形すると

$$f(x)=x^2-(a+4)x+4a+4=\left(x-\frac{a+4}{2}\right)^2-\left(\frac{a+4}{2}\right)^2+4a+4$$

$$=\left(x-\frac{a+4}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2+2a$$

よって，関数 $f(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}a+2$ で最小値 $\dfrac{{}^{アイ}-1}{{}^{ウ}4}a^2+{}^{エ}2a$ をとる。

(2)　放物線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，$a-2\leqq x\leqq a+2$ における関数 $f(x)$ の最大値は

$f(a-2)$ または $f(a+2)$

である。

ここで　　$f(a-2)=\{(a-2)-a\}\{(a-2)-4\}+4=-2a+16$

$f(a+2)=\{(a+2)-a\}\{(a+2)-4\}+4=2a$

$a\geqq 4$ のとき　　$f(a+2)-f(a-2)=2a-(-2a+16)=4(a-4)\geqq 0$

よって　　$f(a+2)\geqq f(a-2)$

したがって，関数 $f(x)$ の最大値は　　$f(a+2)={}^{オ}2a$

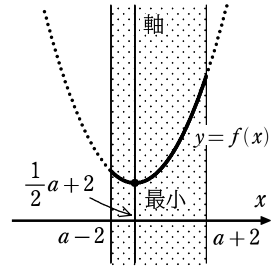
また，$a\geqq 4$ のとき，関数 $f(x)$ の最小値が

$f\left(\dfrac{1}{2}a+2\right)=-\dfrac{1}{4}a^2+2a$ となるのは，

$$a-2\leqq\frac{1}{2}a+2\leqq a+2\quad かつ\quad a\geqq 4$$

すなわち　　$4\leqq a\leqq {}^{カ}8$

のときである。



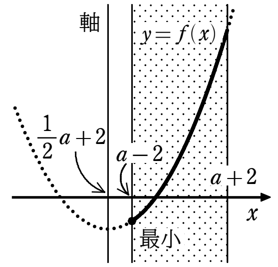
関数 $f(x)$ の最小値が $f(a-2)={}^{キク}-2a+{}^{ケコ}16$

となるのは，

$$\frac{1}{2}a+2<a-2\quad かつ\quad a\geqq 4$$

すなわち　　$8<a$

のときである。



$\boxed{6}$ x の2次関数 $y=x^2+mx+m^2-9$ の最小値が負の値となるような整数 m の個数を求めよ。

解答　7個

(解説)

$y=x^2+mx+m^2-9$ を変形すると　$y=\left(x+\dfrac{m}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}m^2-9$

よって，2次関数 $y=x^2+mx+m^2-9$ は $x=-\dfrac{m}{2}$ で最小値 $\dfrac{3}{4}m^2-9$ をとる。

最小値が負の値となるから　$\dfrac{3}{4}m^2-9<0$

不等式を解くと　$-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$　……①

$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ から　$3<2\sqrt{3}<4$　また　$-4<-2\sqrt{3}<-3$

したがって，不等式①を満たす整数 m は，-3，-2，-1，0，1，2，3 の7個。

$\boxed{7}$ $a>0$ とし，2次関数 $f(x)=x^2-2ax+2a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最小値を $m(a)$ とする。このとき，$m(a)$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ。

解答　$a=1$ で最大値1

(解説)

$f(x)=x^2-2ax+2a=(x-a)^2-a^2+2a$

[1]　$0<a\leqq 2$ のとき

最小値は $f(a)$ であるから　$m(a)=f(a)=-a^2+2a$

[2]　$a>2$ のとき

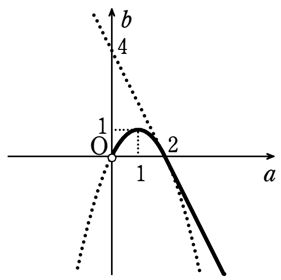
最小値は $f(2)$ であるから　$m(a)=f(2)=-2a+4$

[1]，[2] から　$m(a)=\begin{cases}-a^2+2a & (0<a\leqq 2)\\ -2a+4 & (a>2)\end{cases}$

ここで，$m(a)=-a^2+2a$ を変形すると

$m(a)=-(a-1)^2+1$

ゆえに，$b=m(a)$ とおくと，グラフは右の図のようになる。



したがって，$m(a)$ は $a=1$ で最大値1をとる。

$\boxed{8}$ a を実数の定数とし，x の関数 $f(x)=ax^2+4ax+a^2-1$ を考える。区間 $-4\leqq x\leqq 1$ における関数 $f(x)$ の最大値が5であるとき，定数 a の値を求めよ。

解答　$a=1$，$2-\sqrt{10}$

(解説)

$f(x)=ax^2+4ax+a^2-1$ を変形すると　$f(x)=a(x+2)^2+a^2-4a-1$

区間 $-4\leqq x\leqq 1$ の中央の値は　$-\dfrac{3}{2}$

[1]　$a>0$ のとき

$f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，$-4\leqq x\leqq 1$ において $f(x)$ は $x=1$ で最大値 $f(1)$ をとる。

$f(1)=a^2+5a-1$ であるから，$f(1)=5$ とすると　$a^2+5a-1=5$

すなわち　$a^2+5a-6=0$　　よって　$(a+6)(a-1)=0$

ゆえに　$a=-6$，1

このうち，$a>0$ を満たすものは　$a=1$

[2]　$a=0$ のとき　$f(x)=-1$ となり，条件を満たさない。

[3]　$a<0$ のとき

$f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であり，$-4\leqq x\leqq 1$ において $f(x)$ は $x=-2$ で最大値 $f(-2)$ をとる。

$f(-2)=a^2-4a-1$ であるから，$f(-2)=5$ とすると　$a^2-4a-1=5$

すなわち　$a^2-4a-6=0$　　よって　$a=2\pm\sqrt{10}$

このうち，$a<0$ を満たすものは　$a=2-\sqrt{10}$

以上から，求める a の値は　$a=1$，$2-\sqrt{10}$

9 a，b は実数の定数とし，関数 $y=x^2+2ax+a^2+b\ (0\leqq x\leqq 2)$ の最大値を M，最小値を m とする。

(1)　M を a，b で表すと，

$a<\boxed{\text{ア}}$ のとき，$M=\boxed{\text{イ}}$

$\boxed{\text{ア}}\leqq a$ のとき，$M=\boxed{\text{ウ}}$

である。

(2)　m を a，b で表すと，

$a<\boxed{\text{エ}}$ のとき，$m=\boxed{\text{オ}}$

$\boxed{\text{エ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{カ}}$ のとき，$m=\boxed{\text{キ}}$

$\boxed{\text{カ}}<a$ のとき，$m=\boxed{\text{ク}}$

である。

(3)　a の値が変化するとき，a の関数 $f(a)=M+m$ $\left(\boxed{\text{ア}}\leqq a\leqq\boxed{\text{カ}}\right)$ の最小値が 8 であるような定数 b の値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

解答　(1)　(ア)　-1　　(イ)　a^2+b　　(ウ)　$a^2+4a+b+4$

(2)　(エ)　-2　　(オ)　$a^2+4a+b+4$　　(カ)　0　(キ)　b　　(ク)　a^2+b

(3)　(ケ)　$\dfrac{7}{2}$

解説

$g(x)=x^2+2ax+a^2+b$ とおくと　　$g(x)=(x+a)^2+b\quad(0\leqq x\leqq 2)$

(1)　[1]　$-a>1$ すなわち $a<{}^{ア}-1$ のとき

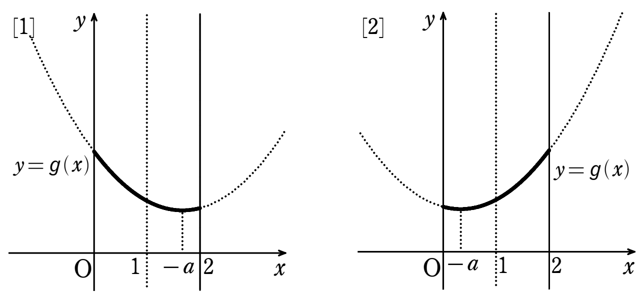
$y=g(x)$ は $x=0$ で最大値をとる。

よって　　$M=g(0)={}^{イ}a^2+b$

[2]　$-a\leqq 1$ すなわち ${}^{ア}-1\leqq a$ のとき

$y=g(x)$ は $x=2$ で最大値をとる。

よって　　$M=g(2)={}^{ウ}a^2+4a+b+4$



(2)　[1]　$2<-a$ すなわち $a<{}^{エ}-2$ のとき

$y=g(x)$ は $x=2$ で最小値をとる。

よって　　$m=g(2)={}^{オ}a^2+4a+b+4$

[2]　$0\leqq -a\leqq 2$ すなわち ${}^{エ}-2\leqq a\leqq{}^{カ}0$ のとき

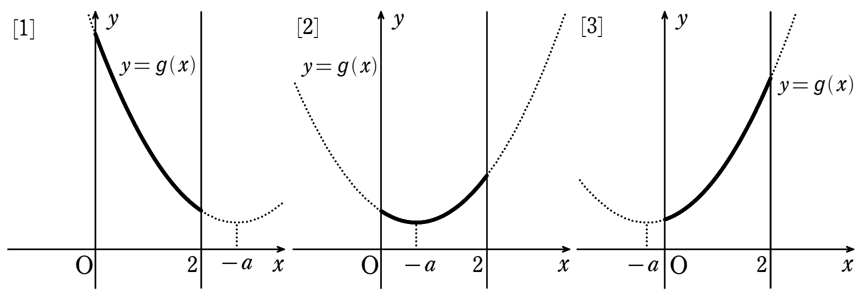
$y=g(x)$ は $x=-a$ で最小値をとる。

よって　　$m=g(-a)={}^{キ}b$

[3]　$-a<0$ すなわち ${}^{カ}0<a$ のとき

$y=g(x)$ は $x=0$ で最小値をとる。

よって　　$m=g(0)={}^{ク}a^2+b$



(3)　(1)，(2) から，

${}^{ア}-1\leqq a\leqq{}^{カ}0$ における M，m は　　$M=a^2+4a+b+4$，$m=b$

ゆえに　　$f(a)=a^2+4a+2b+4=(a+2)^2+2b$

$f(a)$ は，$a=-1$ で最小値 $1+2b$ をとる。

よって　　$1+2b=8$　　　したがって　　$b={}^{ケ}\dfrac{7}{2}$

10 a を正の定数とする。x の 2 次関数 $f(x)=x^2-4x+7$ において，$0\leqq x\leqq a$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする。

$M-m=4$ となるような a の値の範囲は，$\boxed{\text{ア}}\leqq a\leqq\boxed{\text{イ}}$ である。

また，$M-m=6$ のとき，$a=\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

解答　(ア)　2　　(イ)　4　　(ウ)　2　　(エ)　6

解説

$f(x)$ は $x=2$ で最小値 3 をとる。

$f(0)=7$ であり，$f(x)=7$ となる x で $x\neq 0$ であるものは　　$x=4$

$7-3=4$ であるから，$M-m=4$ となるような a の値の範囲は　　${}^{ア}2\leqq a\leqq{}^{イ}4$

また，$M-m=6$ となるのは $a>4$，$M=f(a)=9$，$m=f(2)=3$ のときである。

$f(a)=9$ から　　$a^2-4a-2=0$

よって，$a>4$ から　　$a={}^{ウ}2+\sqrt{{}^{エ}6}$

11 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフの頂点が点 $(1,\ 2)$ であるとき，このグラフと y 軸の交点の座標を a の式で表すと $(x,\ y)=$ ア$\boxed{}$ である。また，このグラフが直線 $y=x$ と接するとき，$a=$ イ$\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$(0,\ a+2)$　　(イ)　$\dfrac{1}{4}$

解説

$y=ax^2+bx+c$ のグラフの頂点が点 $(1,\ 2)$ であるとき，この2次関数は

$$y=a(x-1)^2+2=ax^2-2ax+a+2$$

よって，このグラフと y 軸の交点の座標は　$(x,\ y)=$ ア$(0,\ a+2)$

$y=ax^2-2ax+a+2$ と $y=x$ から y を消去して整理すると

$$ax^2-(2a+1)x+a+2=0$$

この2次方程式の判別式を D とすると　$D=\{-(2a+1)\}^2-4a(a+2)=-4a+1$

$y=ax^2-2ax+a+2$ のグラフが直線 $y=x$ と接するとき，$D=0$ であるから

$$a=\ ^{イ}\frac{1}{4}$$

12 $p,\ q,\ m$ を実数とする。放物線 $y=-x^2+2px+q$ を C とし，その頂点は直線 $y=mx-3$ 上にあるとする。

(1)　q を $p,\ m$ を用いて表せ。

(2)　C の頂点の x 座標が -4 のとき，C が x 軸と異なる2点で交わるように，m の値の範囲を定めよ。また，そのとき C が x 軸から切り取る線分の長さを m を用いて表せ。

(3)　p の値にかかわらず，C と y 軸の共有点の y 座標が負となるように，m の値の範囲を定めよ。

解答　(1)　$q=-p^2+mp-3$　　(2)　$m<-\dfrac{3}{4}$，$2\sqrt{-4m-3}$

(3)　$-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$

解説

(1)　放物線 C の方程式は　$y=-(x-p)^2+p^2+q$

よって，放物線 C の頂点の座標は　$(p,\ p^2+q)$

これが直線 $y=mx-3$ 上にあるから　$p^2+q=mp-3$

ゆえに　$q=-p^2+mp-3$

(2)　放物線 C の頂点の x 座標が -4 であるから　$p=-4$

よって　$q=-(-4)^2-4m-3=-4m-19$

ゆえに，放物線 C の方程式は　$y=-x^2-8x-4m-19$

ここで，2次方程式 $-x^2-8x-4m-19=0$ ……① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-4)^2-(-1)\cdot(-4m-19)=-4m-3$$

放物線 C が x 軸と異なる2点で交わるための必要十分条件は $D>0$ で

$-4m-3>0$　　したがって　$m<-\dfrac{3}{4}$

また，2次方程式 ① の解は　$x=-4\pm\sqrt{-4m-3}$

よって，放物線 C が x 軸から切り取る線分の長さは

$$(-4+\sqrt{-4m-3})-(-4-\sqrt{-4m-3})=2\sqrt{-4m-3}$$

(3)　放物線 C と y 軸の共有点の y 座標は q であり，(1) から　$q=-p^2+mp-3$

よって，y 座標が負となるのは $-p^2+mp-3<0$ ……② のときである。

ここで，p についての2次方程式 $-p^2+mp-3=0$ の判別式を D' とする。

p の値にかかわらず，不等式 ② が成り立つためには　$D'<0$

$D'=m^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)=m^2-12$ であるから　$m^2-12<0$

ゆえに　$-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$

13 ある商店で販売している商品1個の仕入れ価格は500円である。

販売価格を1個800円とすると，1日の販売個数は400個である。また，販売価格の1円の値上げに対し，1日の販売個数は1個の割合で減少し，1円の値下げに対し，1個の割合で増加する。

このとき，利益を最大にする販売価格は ア$\boxed{}$ 円で，1日の販売個数は イ$\boxed{}$ 個である。

解答　(ア)　850　　(イ)　350

解説

n を整数とする。

販売価格を $(800+n)$ 円とするとき，商品1個あたりの利益は

$$(800+n)-500=300+n\ (円)$$

このとき，1日の販売個数は　$(400-n)$ 個

ゆえに，商品全体の利益を $f(n)$ とすると

$$f(n)=(300+n)(400-n)=-n^2+100n+120000$$
$$=-(n-50)^2+122500$$

よって，関数 $f(n)$ は $n=50$ で最大値をとる。

したがって，利益を最大にする販売価格は ア850円で，1日の販売個数は イ350個である。

$\boxed{14}$ k は0でない定数とする。2つの2次不等式

$$x^2-7x+12<0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x^2-3kx+2k^2<0 \quad \cdots\cdots ②$$

を考える。① を満たす x の値の範囲は ア $\boxed{}$ である。

$k<0$ の場合は，② を満たす x の値の範囲は イ $\boxed{}$ であり，そのような x は ① を満たさない。

$k>0$ として考えよう。① と ② の両方を満たす x が存在するような k の値の範囲は ウ $\boxed{}$ である。

また，① を満たす x がすべて ② を満たすような k の値の範囲は エ $\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$3<x<4$　　(イ)　$2k<x<k$　　(ウ)　$\dfrac{3}{2}<k<4$　　(エ)　$2\leqq k\leqq 3$

解説

$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$ から，不等式 ① を満たす x の値の範囲は

$$^{ア}3<x<4 \quad \cdots\cdots ③$$

不等式 ② について　　$x^2-3kx+2k^2=(x-k)(x-2k)$

$k<0$ のとき，不等式 ② を満たす x の値の範囲は　　$^{イ}2k<x<k$

$k>0$ のとき，不等式 ② を満たす x の値の範囲は　　$k<x<2k \quad \cdots\cdots ④$

③，④ から，不等式 ①，② をともに満たす x が存在するような k の値の範囲は

$$3<2k \quad かつ \quad k<4$$

よって　　$^{ウ}\dfrac{3}{2}<k<4$

また，③，④ から，不等式 ① を満たす x がすべて不等式 ② を満たすような k の値の範囲は　　$k\leqq 3$　かつ　$4\leqq 2k$

よって　　$^{エ}2\leqq k\leqq 3$

$\boxed{15}$ a を正の実数とする。xy 平面上の放物線 $y=x^2+(a+1)x-2a+1$ を C とする。C の頂点 P の座標は $\left(ア\boxed{},\ イ\boxed{}\right)$ である。C と x 軸が2個の共有点をもつとき，a のとりうる値の範囲は $a>$ ウ $\boxed{}$ である。以後 $a>$ ウ $\boxed{}$ とし，2点 A，B を，C と x 軸の共有点とする。線分 AB の長さを a を用いて表すと エ $\boxed{}$ である。また △APB が直角三角形であるとき，a の値は $a=$ オ $\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$-\dfrac{a+1}{2}$　　(イ)　$-\dfrac{a^2+10a-3}{4}$　　(ウ)　$-5+2\sqrt{7}$

(エ)　$\sqrt{a^2+10a-3}$　　(オ)　$-5+4\sqrt{2}$

解説

$$y=x^2+(a+1)x-2a+1=\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2-\frac{a^2+10a-3}{4}$$

ゆえに，放物線 C の頂点 P の座標は　　$\left({}^{ア}-\dfrac{a+1}{2},\ {}^{イ}-\dfrac{a^2+10a-3}{4}\right)$

放物線 C と x 軸が2個の共有点をもつための条件は点 P の y 座標が負となることである。

よって　　$-\dfrac{a^2+10a-3}{4}<0$　　　すなわち　　$a^2+10a-3>0$

ゆえに　　$a<-5-2\sqrt{7}$，$-5+2\sqrt{7}<a$

a は正の実数であるから　　$a>{}^{ウ}-5+2\sqrt{7}$

このとき，2次方程式 $x^2+(a+1)x-2a+1=0$ の解は

$$x=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-4\cdot 1\cdot(-2a+1)}}{2}=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{a^2+10a-3}}{2}$$

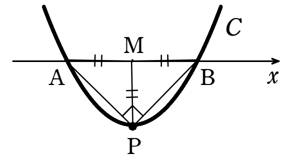
よって，線分 AB の長さは

$$\frac{-(a+1)+\sqrt{a^2+10a-3}}{2}-\frac{-(a+1)-\sqrt{a^2+10a-3}}{2}={}^{エ}\sqrt{a^2+10a-3}$$

また，△APB が直角三角形であるとき，∠APB＝90° の直角二等辺三角形となる。

ゆえに，線分 AB の中点を M とすると，AM＝MP であるから

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+10a-3}=\frac{a^2+10a-3}{4}$$



すなわち　　$2\sqrt{a^2+10a-3}=a^2+10a-3$

両辺を2乗して　　$4(a^2+10a-3)=(a^2+10a-3)^2$

よって　　$(a^2+10a-3)(a^2+10a-7)=0$

ゆえに　　$a=-5\pm 2\sqrt{7}$，$-5\pm 4\sqrt{2}$

$a>-5+2\sqrt{7}$ であるから　　$a={}^{オ}-5+4\sqrt{2}$

$\boxed{16}$ x，y が $y=-x^2+1$，$-1\leqq x\leqq 2$ を満たすとき，x^2+y^2 の最大値は ア $\boxed{}$ であり，最小値は イ $\boxed{}$ である。

解答　(ア)　13　　(イ)　$\dfrac{3}{4}$

解説

$z=x^2+y^2$ とおく。

x，y が $y=-x^2+1$，$-1\leqq x\leqq 2$ を満たすから

$$z=x^2+(-x^2+1)^2=x^4-x^2+1 \quad (-1\leqq x\leqq 2)$$

ここで，$t=x^2$ とおくと　　$z=t^2-t+1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

$-1\leqq x\leqq 2$ のとき，t は $x=0$ で最小値 0，$x=2$ で最大値 4 をとるから

$$0\leqq t\leqq 4 \quad \cdots\cdots ①$$

よって，① の範囲において，$z=x^2+y^2$ は

$t=4$ すなわち $x=2$，$y=-3$ で最大値　$^{ア}13$

$t=\dfrac{1}{2}$ すなわち $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{2}$ で最小値　$^{イ}\dfrac{3}{4}$

をとる。

17 2次関数 $y=x^2-mx+m^2-3m$ のグラフを C とするとき，次の問いに答えよ。ただし，m は定数である。

(1)　C の頂点の座標を求めよ。

(2)　x 軸と C との共有点が1点Pだけであるとき，m の値と点Pの座標を求めよ。

(3)　x 軸の $x\geqq 1$ の部分と C とが，異なる2点で交わるような m の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$\left(\dfrac{m}{2},\ \dfrac{3}{4}m^2-3m\right)$　　(2)　$m=0$ のとき P$(0,\ 0)$，$m=4$ のとき P$(2,\ 0)$

(3)　$2+\sqrt{3}\leqq m<4$

解説

(1)　$y=\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}m^2-3m$

よって，頂点の座標は　$\left(\dfrac{m}{2},\ \dfrac{3}{4}m^2-3m\right)$

(2)　頂点の y 座標 $\dfrac{3}{4}m^2-3m=0$ であるから　　$m=0,\ 4$

$m=0$ のとき頂点の x 座標は0　　　よって　P$(0,\ 0)$

$m=4$ のとき頂点の x 座標は2　　　よって　P$(2,\ 0)$

(3)　x 軸の $x\geqq 1$ の部分と C とが，異なる2点で交わるのは，次の[1]，[2]，[3]が同時に成り立つときである。

[1]　頂点の y 座標が負であるから　　$\dfrac{3}{4}m^2-3m<0$

よって　$0<m<4$　……①

[2]　グラフの軸：直線 $x=\dfrac{m}{2}$ について　　$\dfrac{m}{2}>1$

よって　$m>2$　……②

[3]　$x=1$ のときの y 座標が0以上であるから　　$1-m+m^2-3m\geqq 0$

よって　　$m^2-4m+1\geqq 0$

すなわち　　$m\leqq 2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}\leqq m$　……③

①，②，③の共通範囲を求めて　　$2+\sqrt{3}\leqq m<4$

18 a を実数とし，2次方程式 $x^2+2(a+1)x+3(a^2+4a+3)=0$ を考える。2次方程式の1つの解が正で他の解が負となるとき，a のとりうる値の範囲は $^{ア}\boxed{}$ である。また，2次方程式が2つの異なる正の解をもつとき，a のとりうる値の範囲は $^{イ}\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$-3<a<-1$　　(イ)　$-4<a<-3$

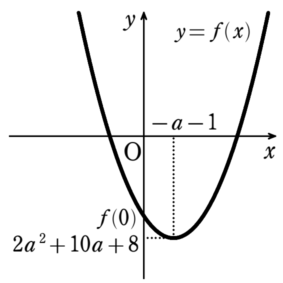
解説

$f(x)=x^2+2(a+1)x+3(a^2+4a+3)$ とおく。

これを変形すると　　$f(x)=(x+a+1)^2+2a^2+10a+8$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で頂点の座標は

$(-a-1,\ 2a^2+10a+8)$



方程式 $f(x)=0$ の1つの解が正で他の解が負となるための条件は，$f(0)<0$ であること，すなわち

$3(a^2+4a+3)<0$

よって　　$^{ア}-3<a<-1$

また，方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの正の解をもつための条件は，$f(0)>0$ かつ $y=f(x)$ のグラフの頂点が第4象限にあること，すなわち

$3(a^2+4a+3)>0$　……①

$-a-1>0$　……②

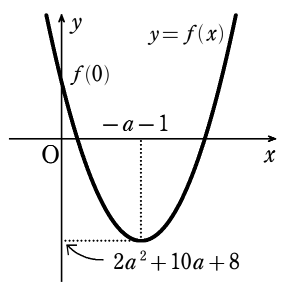
$2a^2+10a+8<0$　……③

①から　　$a<-3,\ -1<a$

②から　　$a<-1$

③から　　$-4<a<-1$

これらの共通範囲を求めて　　$^{イ}-4<a<-3$



19 2次関数 $f(x)=x^2-2ax+a+2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ を通るとき，a の値を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最小値を m とするとき，a を用いて m を表せ。

(3)　$0\leqq x\leqq 3$ において，常に $f(x)>0$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$a=2$

(2)　$a<0$ のとき　$m=a+2$，$0\leqq a\leqq 3$ のとき　$m=-a^2+a+2$，$3<a$ のとき　$m=-5a+11$

(3)　$-2<a<2$

解説

(1)　$1=1^2-2a\cdot 1+a+2$ から　$a=2$

(2)　$f(x)=x^2-2ax+a+2=(x-a)^2-a^2+a+2$

[1]　$a<0$ のとき　$m=f(0)=a+2$

[2]　$0\leqq a\leqq 3$ のとき　$m=f(a)=-a^2+a+2$

[3]　$a>3$ のとき　$m=f(3)=-5a+11$

(3)　[1]　$a<0$ のとき　　(2)から　$a+2>0$

よって　　$a>-2$　　　ゆえに　　$-2<a<0$

[2]　$0\leqq a\leqq 3$ のとき　(2)から　$-a^2+a+2>0$　　よって　$(a-2)(a+1)<0$

ゆえに　　$-1<a<2$　　したがって　$0\leqq a<2$

[3]　$3<a$ のとき　　(2)から　$-5a+11>0$

よって　　$a<\dfrac{11}{5}$　　　これは $3<a$ を満たさない。

以上から　　$-2<a<2$