1 2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフの

頂点は (p, q)、軸は直線 $x=p$ である。

次の2次関数の頂点と軸を求めよ。

(1) $y=x^2+5$

頂点は $(0, 5)$、
軸は直線 $x=0$ (y軸) である。

(2) $y=-2x^2+7$

頂点は $(0, 7)$、
軸は直線 $x=0$ (y軸) である。

(3) $y=(x-1)^2$

頂点は $(1, 0)$、
軸は直線 $x=1$ である。

(4) $y=\dfrac{1}{2}(x+4)^2$

頂点は $(-4, 0)$、
軸は直線 $x=-4$ である。

(5) $y=(x-1)^2+1$

頂点は $(1, 1)$、
軸は直線 $x=1$ である。

(6) $y=\dfrac{1}{2}(x+4)^2+2$

頂点は $(-4, 2)$、
軸は直線 $x=-4$ である。

2 次の2次関数の頂点と軸を求めよ。

(1) $y=x^2-4x$

$y=x^2-4x=(x-2)^2-4$
頂点は $(2, -4)$、
軸は直線 $x=2$ である。

(2) $y=x^2-4x+2$

$y=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$
頂点は $(2, -2)$、
軸は直線 $x=2$ である。

(3) $y=x^2-4x-3$

$y=x^2-4x-3=(x-2)^2-7$
頂点は $(2, -7)$、
軸は直線 $x=2$ である。

3 次の2次関数の頂点と軸を求めよ。

(1) $y=2x^2-8x$

$y=2x^2-8x=2(x-2)^2-8$
頂点は $(2, -8)$、
軸は直線 $x=2$ である。

(2) $y=2x^2-8x+2$

$y=2x^2-8x+2=2(x-2)^2-6$
頂点は $(2, -6)$、
軸は直線 $x=2$ である。

(3) $y=2x^2-8x-1$

$y=2x^2-8x-1=2(x-2)^2-9$
頂点は $(2, -9)$、
軸は直線 $x=2$ である。

(5) $y=-x^2+4x$

$y=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$
頂点は $(2, 4)$、
軸は直線 $x=2$ である。

(6) $y=-x^2+4x+1$

$y=-x^2+4x+1=-(x-2)^2+5$
頂点は $(2, 5)$、
軸は直線 $x=2$ である。

(7) $y=-x^2+4x+3$

$y=-x^2+4x+3=-(x-2)^2+7$
頂点は $(2, 7)$、
軸は直線 $x=2$ である。

4 次の2次関数の頂点と軸を求めよ。

(1) $y=2x^2-6x$

$y=2x^2-6x$
$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$
頂点は$\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right)$、
軸は直線 $x=\frac{3}{2}$ である。

(2) $y=2x^2-6x+2$

$y=2x^2-6x+2$
$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$
頂点は$\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$
軸は直線 $x=\frac{3}{2}$ である。

(3) $y=2x^2-6x-1$

$y=2x^2-6x-1$
$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{11}{2}$
頂点は$\left(\frac{3}{2},-\frac{11}{2}\right)$、
軸は直線 $x=\frac{3}{2}$ である。

(4) $y=2x^2-6x+3$

$y=2x^2-6x+3$
$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$
頂点は$\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$
軸は直線 $x=\frac{3}{2}$ である。

(5) $y=-3x^2+4x$

$y=-3x^2+4x$
$=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$
頂点は$\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$、
軸は直線 $x=\frac{2}{3}$ である。

(6) $y=-3x^2+4x+1$

$y=-3x^2+4x+1$
$=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{7}{3}$
頂点は$\left(\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$、
軸は直線 $x=\frac{2}{3}$ である。

(7) $y=-3x^2+4x+3$

$y=-3x^2+4x+3$
$=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{13}{3}$
頂点は$\left(\frac{2}{3},\frac{13}{3}\right)$、
軸は直線 $x=\frac{2}{3}$ である。

(8) $y=-3x^2+4x-4$

$y=-3x^2+4x-4$
$=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{8}{3}$
頂点は$\left(\frac{2}{3},-\frac{8}{3}\right)$、
軸は直線 $x=\frac{2}{3}$ である。

5 次の2次関数の頂点と軸を求めよ。

(1) $y=x^2-2ax$

$y=x^2-2ax$
$=(x-a)^2-a^2$
頂点は$(a,-a^2)$、
軸は直線 $x=a$ である。

(2) $y=x^2-2ax-a^2$

$y=x^2-2ax-a^2$
$=(x-a)^2-2a^2$
頂点は$(a,-2a^2)$、
軸は直線 $x=a$ である。

(3) $y=x^2-2(a+1)x+2a^2+b$

$y=x^2-2(a+1)x+2a^2+b$
$=\{x-(a+1)\}^2-(a+1)^2+2a^2+b$
$=\{x-(a+1)\}^2-(a^2+2a+1)+2a^2+b$
$=\{x-(a+1)\}^2+a^2-2a+b-1$

頂点は$(a+1,a^2-2a+b-1)$、
軸は直線 $x=a+1$ である。

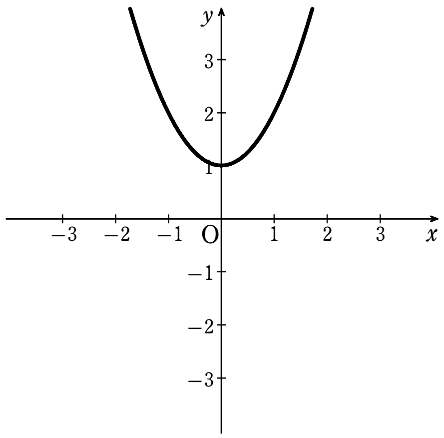
(4) $y=ax^2+4ax-a^2+3a$

$y=ax^2+4ax-a^2+3a$
$=a(x+2)^2-a^2-a$
頂点は$(-2,-a^2-a)$、
軸は直線 $x=-2$ である。

$\boxed{6}$ 次の２次関数の最大値または最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

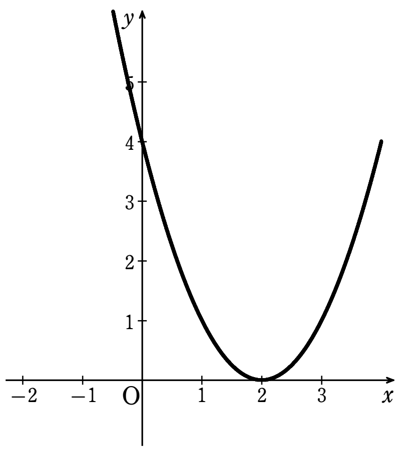
(1)　$y=x^2+1$

y は $x=0$ で 最小値 1をとる。
最大値 はない。



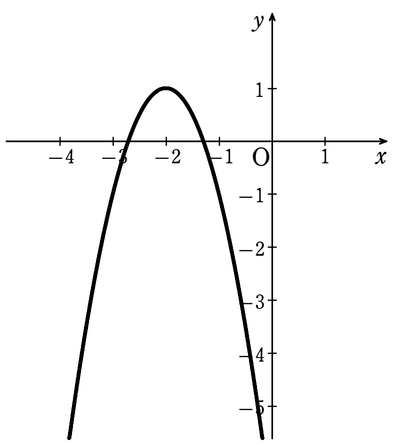
(2)　$y=(x-2)^2$

y は $x=2$ で 最小値 0をとる。
最大値 はない。



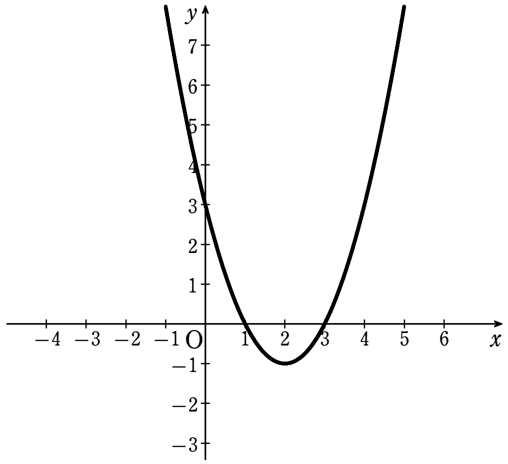
(3)　$y=-2(x+2)^2+1$

y は $x=-2$ で最大値 1 をとる。
最小値 はない。



(4)　$y=x^2-4x+3$

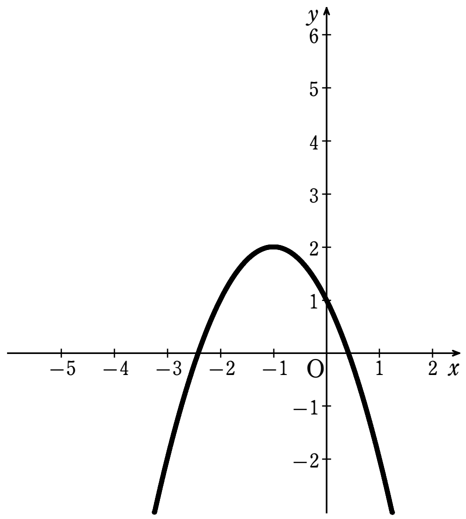
$y=(x-2)^2-1$
したがって，y は
$x=2$ で最小値 -1 をとる。
最大値はない。



(5)　$y=-x^2-2x+1$

$$\begin{aligned}-x^2-2x+1&=-(x^2+2x)+1\\&=-\{(x+1)^2-1\}+1\\&=-(x+1)^2+2\end{aligned}$$

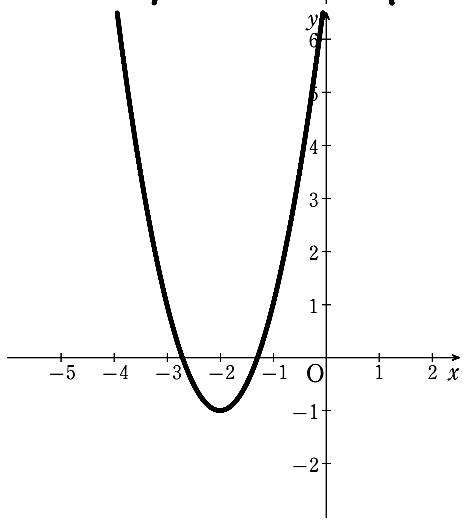
よって　$y=-(x+1)^2+2$
したがって，y は
$x=-1$ で最大値 2 をとる。
最小値はない。



(5)　$y=2x^2+8x+7$

$$\begin{aligned}2x^2+8x+7&=2(x^2+4x)+7\\&=2(x+2)^2-1\end{aligned}$$

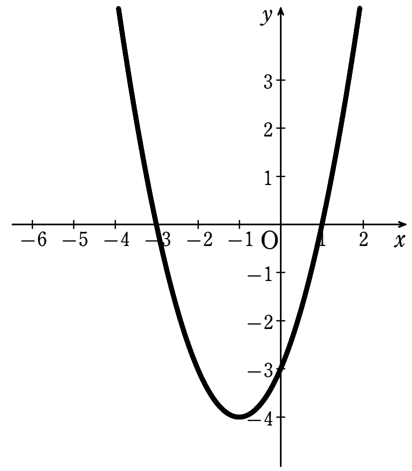
したがって，y は
$x=-2$ で最小値 -1 をとる。
最大値はない。



$\boxed{7}$ 次の２次関数の最大値または最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

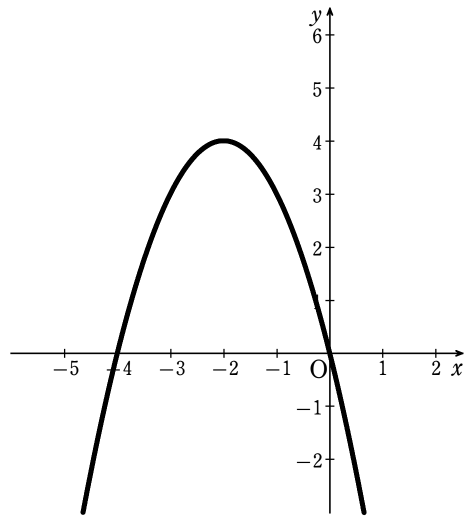
(1) $y=(x-1)(x+3)$

$y=(x+1)^2-4$
したがって，y は
$x=-1$ で最小値 -1 をとる。
最大値はない。



(5)　$y=-x(x+4)$

$y=-(x+2)^2+4$
したがって，y は
$x=-2$ で最大値 4 をとる。
最小値はない



$\boxed{8}$ 次の2次関数の頂点の座標と最大値と最小値があれば求めよ。また、そのときの x の値も求めよ。

(1)　$y=x^2+a$

y は
$x=0$ で最小値 a をとる。
最大値はない

(2)　$y=2(x-a)^2+a-3$

y は
$x=a$ で最小値 $a-3$ をとる。
最大値はない

(3)　$y=x^2-2ax$

$y=(x-a)^2-a^2$
したがって，y は
$x=a$ で最小値 $-a^2$ をとる。
最大値はない

(4)　$y=x^2-2(a+1)x+2a^2+b$

$$
\begin{aligned}
y&=x^2-2(a+1)x+2a^2+b\\
&=\{x-(a+1)\}^2-(a+1)^2+2a^2+b\\
&=\{x-(a+1)\}^2-(a^2+2a+1)+2a^2+b\\
&=\{x-(a+1)\}^2+a^2-2a+b-1
\end{aligned}
$$

$x=a+1$ で最小値 $a^2-2a+b-1$ をとる。
最大値はない

(5)　$y=2x^2-2ax-a^2+a$

$$
\begin{aligned}
y&=2x^2-2ax-a^2+a\\
&=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}-a^2+a\\
&=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{3}{2}a^2+a
\end{aligned}
$$

$x=\frac{a}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}a^2+a$ をとる。
最大値はない

(6)　$y=-x^2+a^2-a$

y は
$x=0$ で最大値 a^2-a をとる。
最小値はない

(7)　$y=-(x-a)^2+a$

y は

$x=a$ で最大値 a をとる。
最小値はない

(8)　$y=-2x^2-4ax+b$

$$
\begin{aligned}
y&=-2x^2-4ax+b\\
&=-2(x+a)^2+2a^2+b
\end{aligned}
$$

$x=-a$ で最大値 $2a^2+b$ をとる。
最小値はない

(9)　$y=ax^2+4ax-a^2+3a$

$$
\begin{aligned}
y&=ax^2+4ax-a^2+3a\\
&=a(x+2)^2-a^2-a
\end{aligned}
$$

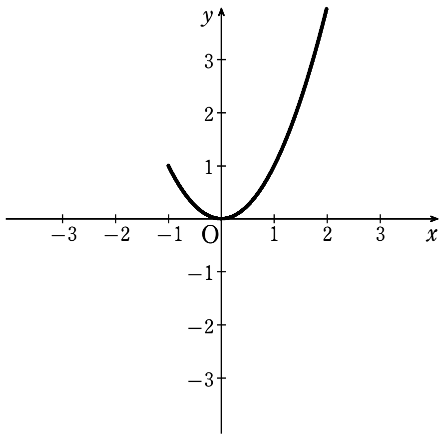
$a>0$ のとき　$x=-2$ で最小値 $-a^2-a$ をとる。
最大値はない

$a<0$ のとき　$x=-2$ で最大値 $-a^2-a$ をとる。
最小値はない

$\boxed{9}$ 次の２次関数の頂点を求め、最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

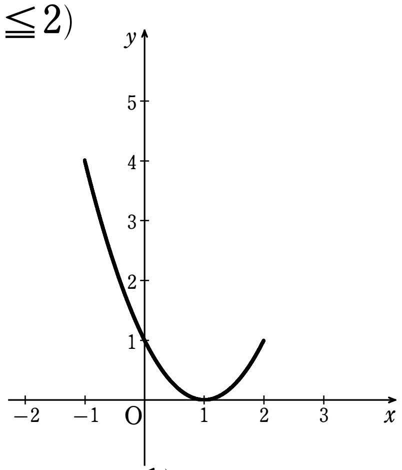
(1)　$y=x^2$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

y は
$x=2$ で最大値 4 をとり，
$x=0$ で最小値 0 をとる。



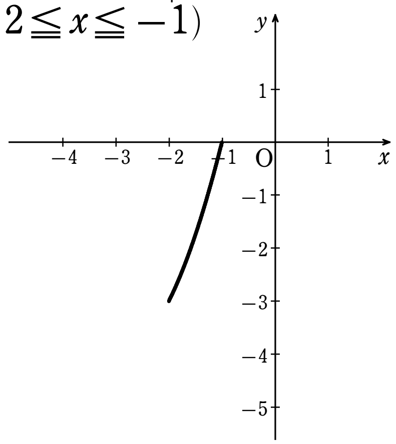
(2)　$y=(x-1)^2$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

y は
$x=-1$ で最大値 4 をとり，
$x=1$ で最小値 0 をとる。



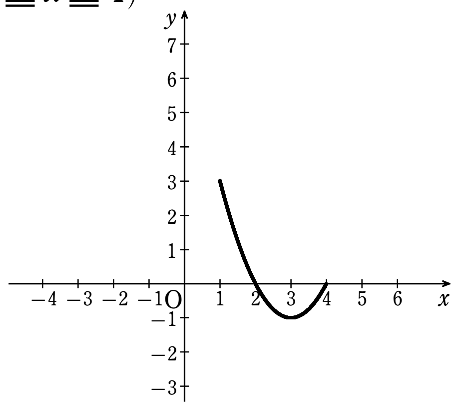
(3)　$y=(x+3)^2-4$　$(-2\leqq x\leqq -1)$

y は
$x=-1$ で最大値 0 をとり，
$x=-2$ で最小値 -3 をとる。



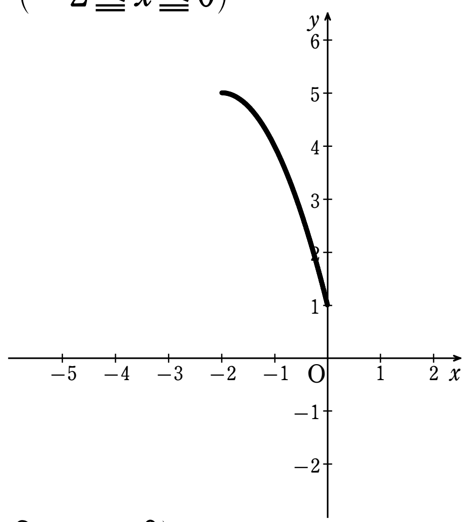
(4)　$y=x^2-6x+8$　$(1\leqq x\leqq 4)$

y は
$x=1$ で最大値 4 をとり，
$x=3$ で最小値 -1 をとる。



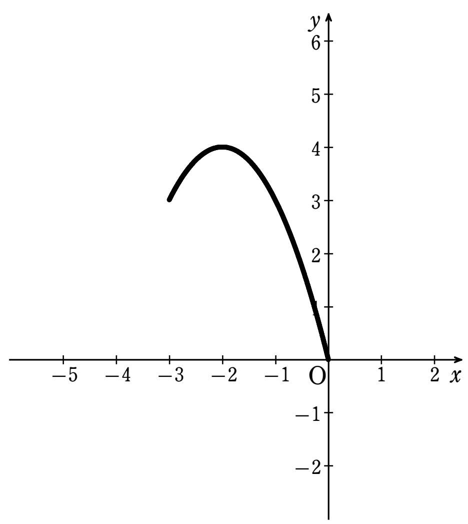
(5)　$y=-x^2-4x+1$　$(-2\leqq x\leqq 0)$

y は
$x=-2$ で最大値 5 をとり，
$x=0$ で最小値 1 をとる。



(5)　$y=-x(x+4)$　$(-3\leqq x\leqq 0)$

y は
$x=-2$ で最大値 4 をとり，
$x=0$ で最小値 0 をとる。



$\boxed{10}$ 次の２次関数の頂点の座標と最小値を求めよ。また、そのときの x の値も求めよ。

(1)　$y=(x-1)^2+a$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

頂点 $(1,\ a)$

軸が定義域の（　左外、中、右外）だから

最小値は $x=$ $\boxed{1}$ のとき $\boxed{a}$

(2)　$y=(x-1)^2+a$　$(-2\leqq x\leqq 0)$

頂点 $(1,\ a)$

軸が定義域の（　左外、中、右外）だから

最小値は $x=$ $\boxed{0}$ のとき $\boxed{a+1}$

(3)　$y=(x-1)^2+a$　$(2 \leqq x \leqq 3)$

頂点 $(1,\ a)$

軸が定義域の（左外、中、右外）だから

最小値は$x=\boxed{2}$ のとき $\boxed{a+1}$

(4)　$y=(x-1)^2+a$　$(a \leqq x \leqq a+2)$

頂点 $(1,\ a)$

ⅰ）$1<a$ のとき

最小値は$x=a$ のとき　a^2-a+1

ⅱ）$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき

最小値は$x=1$ のとき　a

ⅲ）$a<-1$ のとき

最小値は$x=a+2$ のとき　a^2+3a+1

11 2次関数 $y=2(x-a)^2+a-3$　$(-1 \leqq x \leqq 2)$ の頂点の座標と最小値を求めよ。また、そのときの x の値も求めよ。

頂点 $(a,\ a-3)$

ⅰ）$a<-1$ のとき

最小値は$x=-1$ のとき　$2a^2+5a-1$

ⅱ）$-1 \leqq a \leqq 2$ のとき

最小値は$x=a$ のとき　$a-3$

ⅲ）$2<a$ のとき

最小値は$x=2$ のとき　$2a^2-7a+5$

12 次の2次関数の頂点の座標と最大値を求めよ。また、そのときの x の値も求めよ。

(1)　$y=(x-1)^2+a$　$(-1 \leqq x \leqq 2)$

頂点 $(1,\ a)$

軸が定義域の中点より（左側、右側）だから

最大値は$x=\boxed{-1}$ のとき $\boxed{a+4}$

(2)　$y=(x-1)^2+a$　$(0 \leqq x \leqq 3)$

頂点 $(1,\ a)$

軸が定義域の中点より（左側、右側）だから

最大値は$x=\boxed{3}$ のとき $\boxed{a+4}$

(3)　$y=(x-1)^2+a$　$(2\leqq x\leqq 4)$

頂点 $(1,\ a)$

軸が定義域の中点より（左側、右側）だから

最大値は$x=\boxed{4}$　のとき$\boxed{a+9}$

(4)　$y=(x-1)^2+a$　$(a\leqq x\leqq a+2)$

頂点 $(1,\ a)$

ⅰ）$1<a+1$すなわち　$0<a$ のとき

最大値は$x=a+2$ のとき　$a+1$

ⅱ）$a+1\leqq 1$ すなわち　$a\leqq 0$ のとき

最大値は$x=a$ のとき　a^2-a+1

13 2次関数 $y=2(x-a)^2+a-3$　$(-1\leqq x\leqq 2)$ の頂点の座標と最大値を求めよ。また、そのときの x の値も求めよ。

頂点 $(a,\ a-3)$

ⅰ）$\frac{1}{2}<a$のとき

最大値は$x=-1$ のとき　$2a^2+5a-1$

ⅱ）$a\leqq\frac{1}{2}$ のとき

最大値は$x=2$ のとき　$2a^2-7a+5$

14 次の2次方程式が異なる2つの実数解をもつように a の範囲を求めよ。

(1)　$x^2-2ax-5a=0$

この方程式が異なる 2 つの実数解をもつための必要十分条件は，判別式を D とすると

$D=(-2a)^2-4\cdot 1\cdot(-5a)>0$

すなわち　$4a^2+20a>0$

$4a(a+5)>0$

ゆえに　$a<-5,\ 0<a$

(2)　$-2x^2+2ax+a-4=0$

この方程式が異なる 2 つの実数解をもつための必要十分条件は，判別式を D とすると

$D=(2a)^2-4\cdot(-2)\cdot(a-4)>0$

すなわち　$4a^2+8a-32>0$

$4(a+4)(a-2)>0$

ゆえに　$a<-4,\ 2<a$

(3)　$2x^2-2ax-(a-1)=0$

この方程式が異なる 2 つの実数解をもつための必要十分条件は，判別式を D とすると

$D=(-2a)^2-4\cdot 2\cdot\{-(a-1)\}>0$

すなわち　$4a^2+8a-8>0$

$4(a^2+2a-2)>0$

ゆえに　$a<-1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}<a$

15 次の2次関数の頂点を求めよ。また、x 軸と異なる2点で交わるように a の範囲を求めよ。

(1)　$y=x^2-2ax-5a$

$y=x^2-2ax-5a$

$=(x-a)^2-a^2-5a$

頂点は$(a\ ,\ -a^2-5a)$

次にx と異なる2点で交わるa の範囲を求める

$y=x^2-2ax-5a$は下に凸な放物線より

x と異なる2点で交わるための必要十分条件は

頂点のy 座標が負となればよい。

よって　$-a^2-5a<0$

$a<-5,\ 0<a$

(2)　$y=-2x^2+2ax+a-4$

$y=-2x^2+2ax+a-4$

$=-2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}+a-4$

頂点は$\left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{2}+a-4\right)$

次にxと異なる2点で交わるaの範囲を求める
$y=-2x^2+2ax+a-4$は上に凸な放物線より
xと異なる2点で交わるための必要十分条件は
頂点のy座標が正となればよい。

よって　$\frac{a^2}{2}+a-4>0$

$(a+4)(a-2)>0$

ゆえに　$a<-4,\ 2<a$

16 次の2次関数のグラフが、x軸と【　　　】の部分と異なる2点で交わるようにaの範囲を求めよ。

(1)　$y=x^2-2ax-5a$　　【負の部分】

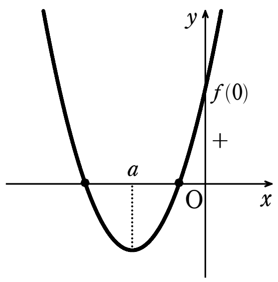
$f(x)=x^2-2ax-5a$とおく

これを変形すると　$f(x)=(x-a)^2-a^2-5a$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である。
また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(-2a)^2-4\cdot1\cdot(-5a)=4a(a+5)$

$y=f(x)$ のグラフと x 軸の負の部分が異なる 2 点で交わればよい。
したがって，次の 3 つが同時に成り立てばよい。



$D=4a(a+5)>0$　…… ①

軸について　$a<0$　…… ②

$f(0)=-5a>0$　…… ③

① から　$a<-5,\ 0<a$　…… ④

② から　$a<0$　…… ⑤

③ から　$a<0$　…… ⑥

④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて

$a<-5$

(2)　$y=2x^2-2ax-(a-1)$　　【正の部分】

$f(x)=2x^2-2ax-(a-1)$とおく

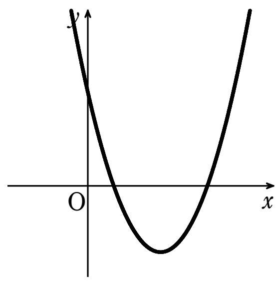
これを変形すると　$f(x)=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}-a+1$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=\frac{a}{2}$ である。

また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(-2a)^2-4\cdot2\cdot\{-(a-1)\}$

$=4(a^2+2a-2)$



$y=f(x)$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わればよい。
したがって，次の 3 つが同時に成り立てばよい。

$D=4(a^2+2a-2)>0$　…… ①

軸について　$\frac{a}{2}>0$　…… ②

$f(0)=-a+1>0$　…… ③

① から　$a<-1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}<a$　…… ④

② から　$a>0$　…… ⑤

③ から　$a<1$　…… ⑥

④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて　$-1+\sqrt{3}<a<1$

(3)　$y=x^2-2(a+1)x+4$　　【$1\leqq x$】

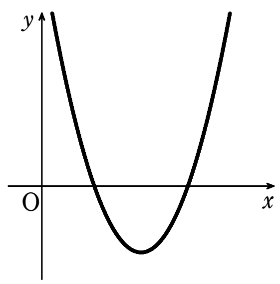
$f(x)=x^2-2(a+1)x+4$とおく

これを変形すると　$f(x)=\{x-(a+1)\}^2-a^2-2a+3$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a+1$ である。また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D/4=\{-(a+1)\}^2-4=a^2+2a-3$

したがって，次の 3つが同時に成り立てばよい。



$D/4=a^2+2a-3>0$　…… ①

軸について　$a+1>1$　…… ②

$f(1)=-2a+3\geqq0$　…… ③

① から　$(a+3)(a-1)>0$

$a<-3,\ 1<a$　…… ④

② から　$a>0$　…… ⑤

③ から　$a\leqq\frac{3}{2}$　…… ⑥

④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて　$1<a\leqq\frac{3}{2}$

(4)　$y=x^2-2(a+1)x+4$　　【$0\leqq x\leqq2$】

$f(x)=x^2-2(a+1)x+4$とおく

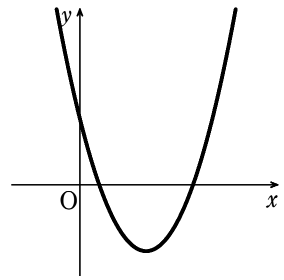
これを変形すると　$f(x)=\{x-(a+1)\}^2-(a+1)^2+4$

$=\{x-(a+1)\}^2-a^2-2a+3$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a+1$ である。また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D/4=\{-(a+1)\}^2-4=a^2+2a-3$

$y=f(x)$ のグラフと x 軸の $0\leqq x\leqq2$ の部分が異なる 2 点で交わればよい。
したがって，次の 4つが同時に成り立てばよい。



$D/4=a^2+2a-3>0$　…… ①

軸について　$a+1>1$　…… ②

$f(0)=4\geqq0$　…… ③

$f(2)=-4a+4\geqq0$　…… ④

① から　$(a+3)(a-1)>0$

$a<-3,\ 1<a$　…… ⑤

② から　$a>0$　…… ⑥

③ から　任意のaで成り立つ　…… ⑦

④から　$a\leqq1$　…… ⑧

⑤，⑥，⑦，⑧の共通範囲を求めて

$1<a\leqq1$

(5)　$y=x^2-2ax-5a$　　【正と負の部分】

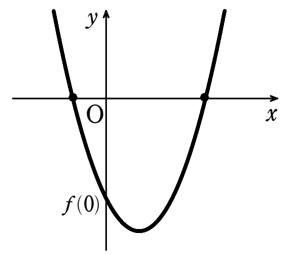
$f(x)=x^2-2ax-5a$とおく。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，
x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは，放物線が y 軸の負の部分と交わるときである。

したがって

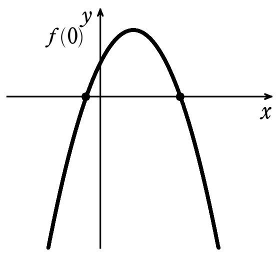
$f(0)<0$　すなわち　$-5a<0$

よって　$a>0$



(7)　$y=-2x^2+2ax+a-4$　【正と負の部分】

$f(x)=-2x^2+2ax+a-4$とおく。
放物線 $y=f(x)$ は上に凸であるから，x軸の正の部分と負の部分で交わるのは，放物線がy軸の正の部分と交わるときである。
したがって
$f(0)>0$　すなわち　$a-4>0$
よって　$a>4$



$\boxed{17}$ 次の2次不等式を解け.

(1)　$(x-1)(x-3)>0$　　(2)　$(2x+3)(3x-2)<0$

(1)　$x<1,\ 3<x$　　(2)　$-\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{2}{3}$

(3)　$(x-5)^2>0$　　(4)　$(4x+3)^2<0$

(3)　5を除くすべての数　　(4)　解はない

(5)　$(2x+1)^2\geqq 0$　　(6)　$(3x-4)^2\leqq 0$

(5)　すべての実数　　(6)　$x=\dfrac{4}{3}$

$\boxed{18}$ 次の2次不等式の解が，すべての実数であるとき，定数kの値の範囲を，それぞれ求めよ.

(1)　$x^2-kx+1>0$

2次不等式 $x^2-kx+1>0$ の解がすべての数であるための条件は
$(-k)^2-4\cdot1\cdot1<0$　すなわち　$k^2-4<0$
これを解いて　$-2<k<2$

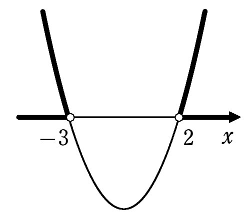
(2)　$-x^2+kx+k<0$

不等式の両辺に -1 を掛けて　$x^2-kx-k>0$
この不等式の解がすべての数であるための条件は
$(-k)^2-4\cdot1\cdot(-k)<0$　すなわち　$k(k+4)<0$
これを解いて　$-4<k<0$

$\boxed{解答}$　(1)　$-2<k<2$　　(2)　$-4<k<0$

$\boxed{19}$ 2次不等式 $ax^2+x+b>0$ の解が $x<-3$，$2<x$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ.

条件から，$y=ax^2+x+b$ のグラフは $x<-3$，$x<2$ の範囲でx軸より上方にある.
すなわち，下に凸である放物線で，2点 $(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るから
$a>0$　……①
$9a-3+b=0$　……②
$4a+2+b=0$　……③
②，③ を連立して解くと
$a=1$，$b=-6$
これは ① を満たす.



$\boxed{解答}$　$a=1$，$b=-6$

$\boxed{20}$ xの2次不等式 $ax^2+bx+8>0$ の解が $-2<x<4$ であるとき，定数 a，b の値を定めよ。

$-2<x<4$ を解とする2次不等式の1つは　$(x+2)(x-4)<0$
よって　$x^2-2x-8<0$　　ゆえに　$-x^2+2x+8>0$
左辺の係数を比較して　$a=-1$，$b=2$

$\boxed{解答}$　$a=-1$，$b=2$

21 次の2次不等式を解け．ただし，a は定数とする．

(1)　$(x+2)(x-a)<0$

(1)　$(x+2)(x-a)<0$ ……①

$(x+2)(x-a)=0$ を解くと　　$x=-2,\ a$

[1]　$a<-2$ のとき　　　① の解は　　$a<x<-2$

[2]　$a=-2$ のとき　　　① は $(x+2)^2<0$ となり，解はない．

[3]　$-2<a$ のとき　　　① の解は　　$-2<x<a$

(2)　$(x-2a)(x-a+1)>0$

(2)　$(x-2a)(x-a+1)>0$ ……①

$(x-2a)(x-a+1)=0$ を解くと　　$x=2a,\ a-1$

[1]　$2a<a-1$ すなわち $a<-1$ のとき

① の解は　　　$x<2a,\ a-1<x$

[2]　$2a=a-1$ すなわち $a=-1$ のとき

① は $(x+2)^2>0$ となり，解は　　-2 以外のすべての数

[3]　$2a>a-1$ すなわち $-1<a$ のとき

① の解は　　　$x<a-1,\ 2a<x$

解答　(1)　$a<-2$ のとき　$a<x<-2$；　$a=-2$ のとき解はない；

$-2<a$ のとき　$-2<x<a$

(2)　$a<-1$ のとき　$x<2a,\ a-1<x$；

$a=-1$ のとき　-2 以外のすべての数；

$-1<a$ のとき　$x<a-1,\ 2a<x$

22 a は定数とする．不等式 $x^2-4ax+3a^2<0$ を解け．

左辺を因数分解すると　　$(x-a)(x-3a)<0$ ……①

[1]　$a<0$ のとき

$3a<a$ であるから，① の解は　　$3a<x<a$

[2]　$a=0$ のとき

① は $x^2<0$ となるから，解はない．

[3]　$a>0$ のとき

$a<3a$ であるから，① の解は　　$a<x<3a$

解答　$a<0$ のとき　$3a<x<a$，$a=0$ のとき　解はない，$0<a$ のとき　$a<x<3a$

23 2つの2次不等式 $x^2-5x-6>0$，$(x-1)(x-a)<0$ を同時に満たす x の整数値がただ1つだけ存在するとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

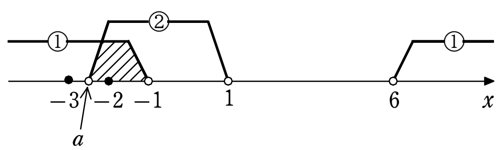
$x^2-5x-6>0$ から　　$(x+1)(x-6)>0$

よって　　$x<-1,\ 6<x$ ……①

[1]　$a<1$ のとき

$(x-1)(x-a)<0$ の解は

$a<x<1$ ……②



①，② を同時に満たす x の整数値がただ1つであるための条件は　$-3\leqq a<-2$　　これは $a<1$ を満たす．

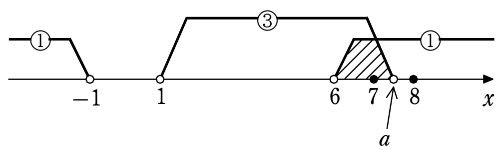
[2]　$a=1$ のとき

不等式 $(x-1)(x-a)<0$ は，$(x-1)^2<0$ となり，解はない．

[3]　$a>1$ のとき

$(x-1)(x-a)<0$ の解は

$1<x<a$ ……③



①，③ を同時に満たす x の整数値がただ1つであるための条件は　$7<a\leqq 8$　　これは $a>1$ を満たす．

[1]～[3] から，求める a の値の範囲は

$-3\leqq a<-2,\quad 7<a\leqq 8$

24 x の連立不等式 $\begin{cases} 5x-8>2x+1 \\ x+3\geqq 3x-a \end{cases}$ を満たす整数 x がちょうど5個存在するような定数 a の値の範囲は $\boxed{アイ}\leqq a<\boxed{ウエ}$ である。

$\begin{cases} 5x-8>2x+1 & \text{……①} \\ x+3\geqq 3x-a & \text{……②} \end{cases}$

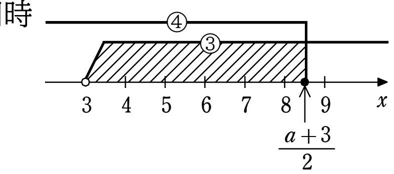
① から　　$3x>9$　　　　よって　$x>3$ ……③

② から　　$-2x\geqq -a-3$　　　よって　$x\leqq\dfrac{a+3}{2}$ ……④

条件を満たすのは，③ と ④ を同時に満たす整数 x が

4，5，6，7，8

となるときである



から　　　$8\leqq\dfrac{a+3}{2}<9$

解答　(アイ)　13　　(ウエ)　15

25 2次不等式 $2x^2-7x+6<0$ の解は ア[　　] である。また，$a>0$ であるとする。2次不等式 $x^2+(2-a)x-2a\leqq 0$ の解は イ[　　] である。これら2つの2次不等式をともに満たす x が存在するような a の値の範囲は ウ[　　] である。

$2x^2-7x+6<0$ から　$(2x-3)(x-2)<0$

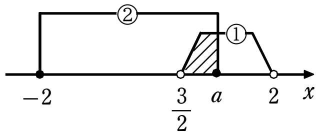
よって　ア $\dfrac{3}{2}<x<2$　……①

$x^2+(2-a)x-2a\leqq 0$ から

$(x+2)(x-a)\leqq 0$

$a>0$ であるから

イ $-2\leqq x\leqq a$　……②



①，② を同時に満たす x の値が存在すればよいから，右の図より　ウ $a>\dfrac{3}{2}$

解答（ア）$\dfrac{3}{2}<x<2$　（イ）$-2\leqq x\leqq a$　（ウ）$a>\dfrac{3}{2}$

26 $0\leqq x\leqq 8$ のすべての x の値に対して，不等式 $x^2-2mx+m+6>0$ が成り立つような定数 m の値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^2-2mx+m+6$ とおくと　$f(x)=(x-m)^2-m^2+m+6$

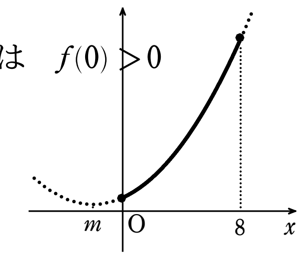
よって，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸の方程式は $x=m$ である。

[1]　$m<0$ のとき図から，求める条件は　$f(0)>0$

すなわち　$m+6>0$

よって　$m>-6$

$m<0$ であるから　$-6<m<0$



[2]　$0\leqq m\leqq 8$ のとき

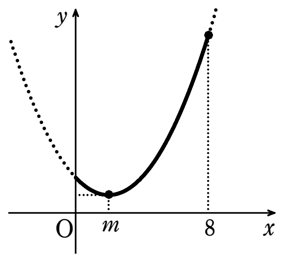
図から，求める条件は　$f(m)>0$

すなわち　$-m^2+m+6>0$

よって　$m^2-m-6<0$

これを解くと　$-2<m<3$

$0\leqq m\leqq 8$ であるから　$0\leqq m<3$



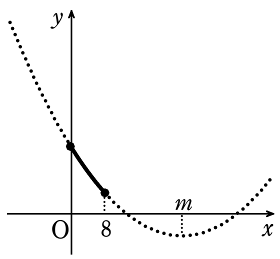
[3]　$8<m$ のとき

図から，求める条件は　$f(8)>0$

すなわち　$64-16m+m+6>0$

これを解くと　$m<\dfrac{14}{3}$

これは $8<m$ を満たさない。



[1]，[2]，[3] から，求める m の値の範囲は

$-6<m<3$