場合の数　大学入試問題にチャレンジ！！

1 [2020 広島工業大]

生徒 50 人に 100 点満点の数学と英語の試験をそれぞれ実施した結果，次の通りであった。

- 数学の得点が 60 点以上の生徒は 20 人であり，英語の得点が 60 点以上の生徒は 18 人 であった。
- 数学と英語の得点が両方とも 60 点以上の生徒は 9 人であった。

　このとき，数学と英語の得点が両方とも 60 点未満の生徒の人数を求めよ。

解説

生徒全体の集合を全体集合 U とし，数学の得点が 60 点以上の生徒の集合を A，英語の得点が 60 点以上の生徒の集合を B とすると

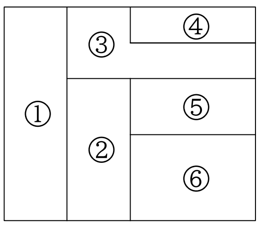
$$n(U)=50,\ n(A)=20,\ n(B)=18,\ n(A\cap B)=9$$

数学と英語の得点が両方とも 60 点未満の生徒の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ であるから

$$\begin{aligned} n(\overline{A}\cap\overline{B})&=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)\\ &=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}\\ &=50-(20+18-9)=21\ (\text{人}) \end{aligned}$$

2 [2020 立命館大]

図の ① から ⑥ の 6 つの部分を色鉛筆を使って塗り分ける方法について考える。ただし，1 つの部分は 1 つの色で塗り，隣り合う部分は異なる色で塗るものとする。



(1)　6 色で塗り分ける方法は，$\boxed{}$ 通りである。

(2)　5 色で塗り分ける方法は，$\boxed{}$ 通りである。

(3)　4 色で塗り分ける方法は，$\boxed{}$ 通りである。

(4)　3 色で塗り分ける方法は，$\boxed{}$ 通りである。

解説

(1)　塗り分け方の数は，異なる 6 個のものを 1 列に並べる方法の数に等しい。
　よって　${}_6P_6=6!=720$ (通り)

(2)　6 つの部分を ②→③→⑤→①→⑥→④ の順に塗ることを考える。
　②，③，⑤ は異なる色を塗るから，5 色から 3 色を選んで塗る方法は
$${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60\ (\text{通り})$$
　① には，②，③，⑤ 以外の色を塗る場合と，⑤ と同じ色を塗る場合がある。
　[1]　① に ②，③，⑤ 以外の色を塗る場合
　　残りの 2 色から選んで塗る方法は　2 通り
　　(i)　⑥ に残った 1 色を塗る場合
　　　④ には ①，②，⑤，⑥ のいずれかと同じ色を塗るから　4 通り
　　(ii)　⑥ に既に塗った色を塗る場合
　　　⑥ には ① または ③ と同じ色を塗り，④ には残った 1 色を塗るから　2 通り
　　よって，[1] の場合は　$2\times(4+2)=12$ (通り)
　[2]　① に ⑤ と同じ色を塗る場合
　　⑥，④ には残った 2 色を塗るから　2 通り
　以上から，塗り分ける方法は　$60\times(12+2)=840$ (通り)

(3)　(2) と同様に，②→③→⑤→①→⑥→④ の順に塗ることを考える。
　②，③，⑤ は異なる色を塗るから，4 色から 3 色を選んで塗る方法は
$${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24\ (\text{通り})$$
　① には，②，③，⑤ 以外の色を塗る場合と，⑤ と同じ色を塗る場合がある。
　[1]　① に ②，③，⑤ 以外の色を塗る場合
　　残った 1 色を塗るから　1 通り
　　⑥ には ① または ③ と同じ色を塗り，いずれの場合も，④ には，① または ② または ⑤ と同じ色を塗るから　$2\times3=6$ 通り
　[2]　① に ⑤ と同じ色を塗る場合
　　⑥ には，残りの色を塗る場合と，③ と同じ色を塗る場合がある。
　　(i)　⑥ に残りの色を塗る場合
　　　⑥ の塗り方は　1 通り
　　　④ には，① または ② または ⑥ と同じ色を塗るから　3 通り
　　(ii)　⑥ に ③ と同じ色を塗る場合
　　　④ には残りの色を塗るから　1 通り
　　よって，[2] の場合は　$3+1=4$ (通り)
　以上から，塗り分ける方法は　$24\times(6+4)=240$ (通り)

(4)　(2)，(3) と同様に，②→③→⑤→①→⑥→④ の順に塗ることを考える。
　②，③，⑤ は異なる色を塗るから，3 色から 3 色を選んで塗る方法は
$${}_3P_3=3\cdot2\cdot1=6\ (\text{通り})$$
　① には ⑤ と同じ色を塗る。
　⑥ には ③ と同じ色を塗る。
　④ には ② または ⑤ と同じ色を塗る。
　よって，塗り分ける方法は　$6\times1\times1\times2=12$ (通り)

別解　((2)～(4) について，同じ色で塗る部分を決める方法)

(2)　①～⑥ のうち，同じ色で塗る 2 つの部分を決めて，5 色を塗り分ければよい。
　隣り合う部分は異なる色で塗るから，同じ色で塗る 2 つの部分は
　　① と ④，① と ⑤，① と ⑥，② と ④，③ と ⑥，④ と ⑤，④ と ⑥
　の 7 通りある。よって，塗り分ける方法は
$$7\times{}_5P_5=7\times(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)=840\ (\text{通り})$$

(3)　4 色で塗る方法は，6 つの部分のうち
　[1]　同じ色で塗る 2 つの部分を 2 組選ぶ
　[2]　同じ色で塗る 3 つの部分を 1 組選ぶ
　がある。
　[1]　A と B に同じ色，C と D に別の同じ色を塗ることを「AB と CD」のように表すと，同じ色を塗る部分の 2 組の選び方は
　　「①④ と ③⑥」，「①⑤ と ②④」，「①⑤ と ③⑥」，「①⑤ と ④⑥」，
　　「①⑥ と ②④」，「①⑥ と ④⑤」，「②④ と ③⑥」，「③⑥ と ④⑤」
　　の 8 通りある。
　[2]　同じ色で塗る 3 つの部分の選び方は
　　「① と ④ と ⑤」，「① と ④ と ⑥」
　　の 2 通りある。
　よって，塗り分ける方法は　$(8+2)\times{}_4P_4=10\times4\cdot3\cdot2\cdot1=240$ (通り)

(4)　3 色で塗る方法は，6 つの部分のうち
　[1]　同じ色で塗る 2 つの部分を 3 組選ぶ
　[2]　3 つの部分を同じ色で塗り，残りのうち 2 つの部分を同じ色で塗り，更に残りの 1 つの部分を残った色で塗る
　がある。
　[1]　3 組の選び方は「①⑤ と ②④ と ③⑥」のみである。
　[2]　同じ色で塗る部分の選び方は「①④⑤ と ③⑥ と ②」のみである。
　よって，塗り分ける方法は　$(1+1)\times{}_3P_3=2\times3\cdot2\cdot1=12$ (通り)

3 [2020 日本女子大]

a，b，c，d の 4 人が部屋 A，B，C に分かれて泊

まる。空き部屋ができてもよいとするとき，次の問いに答えよ。

(1)　すべての泊まり方は何通りあるか。

(2)　A が空き部屋である泊まり方は何通りあるか。

(3)　A は空き部屋だが B も C も空き部屋でない泊まり方は何通りあるか。

(4)　A または B が空き部屋である泊まり方は何通りあるか。

(5)　空き部屋が 1 つもない泊まり方は何通りあるか。

解説

(1)　4 人の部屋の選び方は 3 通りずつあるから　$3^4=81$（通り）

(2)　4 人の部屋の選び方は B，C の 2 通りずつあるから　$2^4=16$（通り）

(3)　A が空き部屋で，B と C のどちらかが空き部屋であるのはそれぞれ 1 通りずつあるから　$16-2=14$（通り）

(4)　A，B が空き部屋である泊まり方は，(2) より，それぞれ　16 通り
A も B も空き部屋である泊まり方は　1 通り
よって　$16+16-1=31$（通り）

(5)　少なくとも 1 つの部屋が空き部屋である泊まり方を考える。
少なくとも 1 つの部屋が空き部屋であるのは，1 つの部屋だけが空き部屋である場合と，2 つの部屋が空き部屋である場合である。
1 つの部屋だけが空き部屋である場合は，(3) より　$3\times14=42$（通り）
2 つの部屋が空き部屋である場合は　3 通り
よって，求める泊まり方は　$81-(42+3)=36$（通り）