確率　大学入試問題にチャレンジ！！

$\boxed{1}$ [2020 愛媛大]

さいころを 4 回続けて投げる。出た目の和が 7 以上である確率を求めよ。

(解説)

さいころを 4 回続けて投げて，出た目の和が 6 以下である確率について考える。

[1]　出た目の和が 4 の場合
4 回とも 1 の目が出るから，目の出方は　1 通り

[2]　出た目の和が 5 の場合
4 回のうち 3 回は 1 が出て，残りの 1 回は 2 が出るから，目の出方は　${}_4C_1$ 通り

[3]　出た目の和が 6 の場合
「4 回のうち 3 回は 1 が出て，残りの 1 回は 3 が出る」または「4 回のうち，1 が 2 回，2 が 2 回出る」から，目の出方は　${}_4C_1+{}_4C_2$ (通り)

[1]～[3] から，出た目の和が 6 以下である確率は

$$\frac{1+{}_4C_1+{}_4C_1+{}_4C_2}{6^4}=\frac{15}{6^4}=\frac{5}{432}$$

よって，求める確率は　$1-\frac{5}{432}=\frac{427}{432}$

$\boxed{2}$ [2020 立教大]

1 個のさいころを 3 回投げるとき，1 の目が少なくとも 1 回出て，かつ 5 の目も少なくとも 1 回出る確率は $\boxed{}$ である。

(解説)

1 個のさいころを 3 回投げるとき，目の出方は　6^3 通り

[1]　1 が 1 回，5 が 2 回出るとき
目の出方は　${}_3C_1$ 通り

[2]　1 が 2 回，5 が 1 回出るとき
目の出方は　${}_3C_1$ 通り

[3]　1 が 1 回，5 が 1 回と，1 と 5 以外の目が 1 回出るとき
目の出方は　$4\times3!$ 通り

[1]～[3] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{{}_3C_1+{}_3C_1+4\times3!}{6^3}=\frac{30}{6^3}=\frac{5}{36}$$

$\boxed{3}$ [2020 弘前大]

A の袋には赤球 2 個，白球 3 個，青球 2 個，B の袋には赤球 3 個，白球 4 個が入っている。A，B の袋から 2 個ずつ合計 4 個の球を取り出す。このとき，取り出された 4 個の球の色が 2 色以下である確率を求めよ。

(解説)

取り出された 4 個の球の色が 3 色となるのは

[1]　A から青球 2 個，B から赤玉 1 個と白球 1 個

[2]　A から青球 1 個と赤球 1 個，B から「白球 2 個，または赤球 1 個と白球 1 個」

[3]　A から青球 1 個と白球 1 個，B から「赤球 2 個，または赤球 1 個と白球 1 個」

のように取り出す場合があり，[1]～[3] の事象は互いに排反である。

よって，取り出された 4 個の球の色が 3 色である確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_7C_2}\times\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}+\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_7C_2}\times\left(\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}+\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}\right)+\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}\times\left(\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}+\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}\right)$$

$$=\frac{1}{21}\times\frac{12}{21}+\frac{4}{21}\times\left(\frac{6}{21}+\frac{12}{21}\right)+\frac{6}{21}\times\left(\frac{3}{21}+\frac{12}{21}\right)=\frac{174}{21^2}=\frac{58}{147}$$

ゆえに，求める確率は　$1-\frac{58}{147}=\frac{89}{147}$

$\boxed{4}$ [2020 東京慈恵会医科大]

袋 A には赤玉 3 個，白玉 1 個，袋 B には赤玉 1 個，白玉 3 個が入っている。

「袋 A から 2 個の玉を取り出して袋 B に入れ，次に，袋 B から 2 個の玉を取り出して袋 A に入れる」という操作を繰り返す。1 回の操作の後，袋 A に

白玉が2個以上ある確率は ア$\boxed{}$，2回の操作の後，袋Aの中が白玉だけになる確率は イ$\boxed{}$ である。

解説

n 回目の操作で袋Aから取り出される赤玉，白玉の個数をそれぞれ RA_n，WA_n とし，袋Bから取り出される赤玉，白玉の個数をそれぞれ RB_n，WB_n とする。

1回の操作の後，Aに白玉が4個あることはない。

[1]　1回目の操作後，Aに白玉が2個ある場合

$(RA_1, WA_1)=(2, 0)$ のとき，$(RB_1, WB_1)=(1, 1)$ である。

また，$(RA_1, WA_1)=(1, 1)$ のとき，$(RB_1, WB_1)=(0, 2)$ である。

よって，[1] の場合の確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}\times\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}+\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{6}\times\frac{9}{15}+\frac{3}{6}\times\frac{6}{15}=\frac{1}{2}$$

[2]　1回目の操作後，Aに白玉が3個ある場合

このとき，$(RA_1, WA_1)=(2, 0)$，$(RB_1, WB_1)=(0, 2)$ である。

ゆえに，[2] の場合の確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{6}\times\frac{3}{15}=\frac{1}{10}$$

[1]，[2] の事象は互いに排反であるから，1回の操作の後，Aに白玉が2個以上ある確率は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}={}^{ア}\frac{3}{5}$$

2回の操作の後，Aの中が白玉だけになるとき，Aの中の白玉の個数は4個である。

よって，

[3]　1回目の操作後，Aに白玉が2個あり，2回目の操作後，Aに白玉が4個ある

[4]　1回目の操作後，Aに白玉が3個あり，2回目の操作後，Aに白玉が4個ある

の2つの場合があり，[3]，[4] の事象は互いに排反である。

[3] の場合，$(RA_2, WA_2)=(2, 0)$，$(RB_2, WB_2)=(0, 2)$ であり，この場合の確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{180}$$

[4] の場合，$(RA_2, WA_2)=(1, 1)$，$(RB_2, WB_2)=(0, 2)$ であり，この場合の確率は

$$\frac{1}{10}\times\frac{{}_1C_1\times{}_3C_1}{{}_4C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{300}$$

ゆえに，2回の操作の後，Aの中が白玉だけになる確率は

$$\frac{1}{180}+\frac{1}{300}={}^{イ}\frac{2}{225}$$