

解説

- [1] (1) $AB = BC \cos \theta = a \cos \theta$
 (2) $AD = AB \sin \theta = a \cos \theta \cdot \sin \theta = a \sin \theta \cos \theta$
 (3) (解1) $AC = BC \sin \theta = a \sin \theta$
 また $\angle CAD = 90^\circ - \angle BAD = \angle ABD = \theta$
 よって $CD = AC \sin \theta = a \sin \theta \cdot \sin \theta = a \sin^2 \theta$
 (解2) $BD = AB \cos \theta = (a \cos \theta) \cdot \cos \theta = a \cos^2 \theta$
 よって $CD = BC - BD = a - a \cos^2 \theta = a(1 - \cos^2 \theta)$
 (解3) $\angle CAD = 90^\circ - \angle BAD = \angle ABD = \theta$
 よって $CD = AD \tan \theta = a \sin \theta \cos \theta \tan \theta$

注意 $(\sin \theta)^2$, $(\cos \theta)^2$ は、それぞれ $\sin^2 \theta$, $\cos^2 \theta$ と書く。

参考 次の項目で学ぶ三角比の相互関係

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

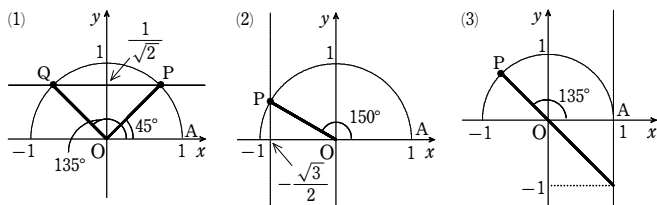
を用いると、(3) で求めた3つの答え

$$a \sin^2 \theta, a(1 - \cos^2 \theta), a \sin \theta \cos \theta \tan \theta$$

はどれも同じ形になることがわかる。

解説

- [2] (1) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は、図で $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ である。
 よって $\theta = 45^\circ, 135^\circ$
 (2) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は、図で $\angle AOP$ である。
 よって $\theta = 150^\circ$
 (3) $\tan \theta = -1$ を満たす θ は、図で $\angle AOP$ である。
 よって $\theta = 135^\circ$

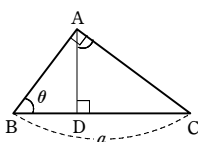


解説

- [3] (1) $\sin \theta = \frac{5}{6}$ から、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ または $90^\circ < \theta < 180^\circ$ である。
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$
 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき、 $\cos \theta > 0$ であるから
 $\cos \theta = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$
 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{5}{6} \div \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{5}{\sqrt{11}}$
 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき、 $\cos \theta < 0$ であるから
 $\cos \theta = -\sqrt{\frac{11}{36}} = -\frac{\sqrt{11}}{6}$
 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{5}{6} \div \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right) = -\frac{5}{\sqrt{11}}$
 (2) $\cos \theta = -\frac{1}{5}$ から、 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ である。
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$
 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ より、 $\sin \theta > 0$ であるから
 $\sin \theta = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$
 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \div \left(-\frac{1}{5}\right) = -2\sqrt{6}$
 (3) $\tan \theta = \sqrt{2}$ から、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ である。
 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (\sqrt{2})^2 = 3$
 よって $\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$
 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より、 $\cos \theta > 0$ であるから $\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 また、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ から
 $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

解説

- [4] (1) 直線の傾きが -1 であるから $\tan \theta = -1$
 よって $\theta = 135^\circ$



- (2) 直線の傾きが $\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

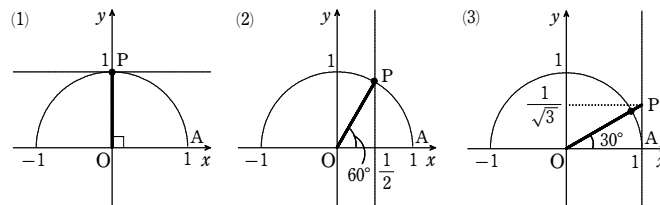
よって $\theta = 30^\circ$

解説

- [5] (1) $\sin \theta = 1$ を満たす θ は、図で $\angle AOP$ である。
 よって $\theta = 90^\circ$
 (2) $2 \cos \theta - 1 = 0$ から $\cos \theta = \frac{1}{2}$
 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ は、図で $\angle AOP$ である。
 よって $\theta = 60^\circ$
 (3) $3 \tan \theta = \sqrt{3}$ から $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ は、図で $\angle AOP$ である。

よって $\theta = 30^\circ$



解説

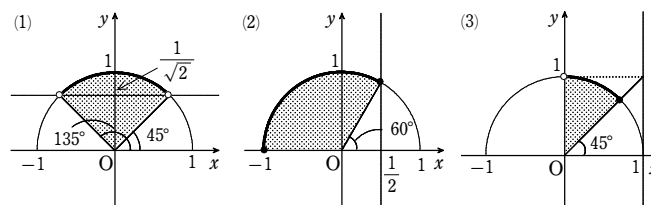
- [6] (1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を2乗すると $\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$
 よって $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$ したがって $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8}$
 (2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$
 $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$
別解 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$
 $= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{9\sqrt{3}}{16}$
 (3) $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$
 $= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$
 $= 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4}$
 $\sin \theta \cos \theta < 0$ であるから $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$
 よって、 $\sin \theta - \cos \theta > 0$ であるから $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

解説

- [7] $\cos 10^\circ = \cos(90^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ$,
 $\cos 80^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ$,
 $\sin 110^\circ = \sin(180^\circ - 70^\circ) = \sin 70^\circ$,
 $\sin 130^\circ = \sin(180^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ$,
 $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$
 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ のとき、 θ が大きくなると $\sin \theta$ の値も大きくなる。
 よって、 $\sin 10^\circ, \sin 20^\circ, \sin 40^\circ, \sin 50^\circ, \sin 70^\circ, \sin 80^\circ$ の順に大きくなる。
 したがって、与えられた三角比の値を小さい方から順に並べると
 $\cos 80^\circ, \sin 160^\circ, \sin 40^\circ, \sin 130^\circ, \sin 110^\circ, \cos 10^\circ$

解説

- [8] (1) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は $\theta = 45^\circ, 135^\circ$
 図から、不等式を満たす θ の値の範囲は $45^\circ < \theta < 135^\circ$
 (2) $\cos \theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ は $\theta = 60^\circ$
 図から、不等式を満たす θ の値の範囲は $60^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$
 (3) $\tan \theta = 1$ を満たす θ は $\theta = 45^\circ$
 図から、不等式を満たす θ の値の範囲は $45^\circ \leq \theta < 90^\circ$



解説

- [9] (1) 与式 $= \cos \theta - \sin \theta + \sin \theta - \cos \theta = 0$
 (2) $\sin(90^\circ + \theta) = \sin(180^\circ - (90^\circ - \theta)) = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \cos\{180^\circ - (90^\circ - \theta)\} = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

であるから

$$\text{与式} = \cos \theta \cdot \cos \theta - (-\sin \theta) \sin \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

(解説)

$$[10] (1) \text{ 正弦定理により } \frac{a}{\sin A} = 2R \text{ であるから } \frac{3}{\sin 150^\circ} = 2R$$

$$\text{よって } R = \frac{3}{2 \sin 150^\circ} = 3$$

$$(2) \text{ 正弦定理により } \frac{b}{\sin B} = 2R \text{ であるから } \frac{4\sqrt{3}}{\sin B} = 2 \cdot 4$$

$$\text{よって } \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{したがって } B = 60^\circ, 120^\circ$$

$$(3) \text{ 正弦定理により } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ であるから } \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 120^\circ}$$

$$\text{よって } b = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 120^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

(解説)

$$[11] (1) \text{ 余弦定理により}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$$

$$= (3\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2 \cos 45^\circ$$

$$= 18 + 4 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 10$$

$$b > 0 \text{ であるから } b = \sqrt{10}$$

$$(2) \text{ 余弦定理により}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$= 2^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cos 30^\circ$$

$$= 4 + (4 - 2\sqrt{3}) - 4(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2$$

$$c > 0 \text{ であるから } c = \sqrt{2}$$

$$(3) \text{ 余弦定理により}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{-15}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{よって } A = 120^\circ$$

(解説)

$$[12] (1) \text{ 余弦定理により } 7^2 = c^2 + 8^2 - 2 \cdot c \cdot 8 \cos 60^\circ$$

$$\text{よって } c^2 - 8c + 15 = 0 \quad \text{すなわち } (c - 3)(c - 5) = 0$$

$$\text{ゆえに } c = 3, 5 \quad (\text{これは } c > 0 \text{ を満たす})$$

$$(2) \text{ 余弦定理により } (\sqrt{7})^2 = b^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}b \cos 30^\circ$$

$$\text{よって } b^2 - 3b - 4 = 0 \quad \text{すなわち } (b + 1)(b - 4) = 0$$

$$b > 0 \text{ であるから } b = 4$$

(解説)

$$[13] (1) 6^2 > 4^2 + 3^2 \text{ であるから } a^2 > b^2 + c^2$$

$$\text{よって } A > 90^\circ$$

最大の角 A が鈍角であるから、 $\triangle ABC$ は鈍角三角形である。

$$(2) (3\sqrt{2})^2 < (\sqrt{6})^2 + 4^2 \text{ であるから } b^2 < a^2 + c^2$$

$$\text{よって } B < 90^\circ$$

最大の角 B が鋭角であるから、 $\triangle ABC$ は鋭角三角形である。

(参考) $a^2 = 6, b^2 = 18, c^2 = 16$ から、最大の辺の長さは b であり、最大の角は B である。

$$(3) a^2 = 3 + 2\sqrt{2}, b^2 = 3 - 2\sqrt{2}, c^2 = 6 \text{ であるから } a^2 + b^2 = c^2$$

$$\text{よって } C = 90^\circ$$

最大の角 C が直角であるから、 $\triangle ABC$ は直角三角形である。

$$(参考) 2\sqrt{2} = \sqrt{8} < 3 \text{ であるから } 3 + 2\sqrt{2} < 6$$

よって、 $3 - 2\sqrt{2} < 3 + 2\sqrt{2} < 6$ から、最大の辺の長さは c であり、最大の角は C である。

(解説)

$$[14] (1) \text{ 四角形 } ABCD \text{ は円に内接しているから}$$

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$

$$\text{よって } \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

$$\triangle ABD \text{ に余弦定理を使うと } BD^2 = (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ = 5$$

$$BD > 0 \text{ であるから } BD = \sqrt{5}$$

$$(2) \triangle ABD \text{ に正弦定理を使うと } \frac{BD}{\sin \angle BAD} = 2R$$

$$\text{よって } R = \frac{BD}{2 \sin \angle BAD} = \frac{\sqrt{5}}{2 \sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

(解説)

$$[15] \text{ 正弦定理により}$$

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$\text{が成り立つから } a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{5} : 1$$

このとき、正の数 k を用いて

$$a = \sqrt{2}k, b = \sqrt{5}k, c = k$$

と表すことができる。

b が最大の辺であるから、 B が最大の角である。

$$\text{余弦定理により } \cos B = \frac{k^2 + (\sqrt{2}k)^2 - (\sqrt{5}k)^2}{2 \cdot k \cdot \sqrt{2}k} = \frac{-2k^2}{2 \cdot k \cdot \sqrt{2}k} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって、最大の角の大きさは } B = 135^\circ$$

(解説)

$$[16] \text{ 余弦定理により } \cos A = \frac{8^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

$$\sin A > 0 \text{ であるから } \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{7} = 12\sqrt{5}$$

$$\text{また } S = \frac{1}{2}r(a + b + c) = \frac{1}{2}r(9 + 8 + 7) = 12r$$

$$\text{よって、} 12r = 12\sqrt{5} \text{ から } r = \sqrt{5}$$

