

[1] [2020 立教大]

(解説)

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{2}$$

ゆえに $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2}$

よって $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$

したがって $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$
 $= \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$

(別解) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$
 $= \frac{\sqrt{6}}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\sqrt{6}}{8}$

[2] [2020 関西学院大]

(解説)

正弦定理より

$$BC : CA : AB = \sin A : \sin B : \sin C$$

これと与えられた等式から

$$BC : CA : AB = 7 : 5 : 3$$

よって、ある正の数 k を用いて

$$BC = 7k, CA = 5k, AB = 3k$$

と表される。

余弦定理より $\cos A = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 5k} = -\frac{15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}$

$0^\circ < A < 180^\circ$ であるから $A = 120^\circ$

よって、 $\sin A = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、 $\triangle ABC$ の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3k \cdot 5k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} k^2$$

辺 AC を直径とする円の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \pi \left(\frac{5}{2}k\right)^2 = \frac{25}{4} \pi k^2$$

ゆえに $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{25}{4} \pi k^2}{\frac{15\sqrt{3}}{4} k^2} = \frac{5\sqrt{3}}{9} \pi$

更に $AH = 3k \cos(180^\circ - 120^\circ) = \frac{3}{2}k$

よって、点 H は辺 AC を

$$\frac{3}{2}k : \left(\frac{3}{2}k + 5k\right) = 3 : 13$$

の比に外分する。

[3] [2020 中央大]

(解説)

(1) $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形であるから

$$\angle ACB = \angle ABC = 72^\circ$$

ゆえに $\angle BAC = 180^\circ - 72^\circ \times 2 = 36^\circ$

よって $\angle BDC = 36^\circ + 72^\circ \times \frac{1}{2} = 72^\circ$

(2) $BC = x$ とする。

(1) より、 $\triangle BCD$ は $\angle BCD = \angle BDC = 72^\circ$ の二等辺三角形であるから $BD = BC = x$

また、 $\triangle DAB$ は $\angle DAB = \angle DBA = 36^\circ$ の二等辺三角形であるから $DA = DB = x$

ゆえに $CD = 1 - x$

また、 $\angle ABC = \angle BCD$, $\angle BAC = \angle CBD$ より、 $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ であるから

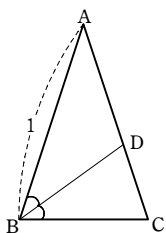
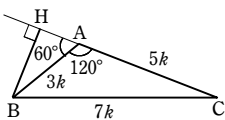
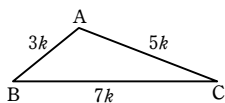
$$1 : x = x : (1 - x)$$

よって $x^2 + x - 1 = 0$

$x > 0$ であるから $BC = x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

(3) 点 D から辺 AB に垂線 DH を下ろすと、 $AH = BH = \frac{1}{2}$ であるから、(2) より

$$\cos 36^\circ = \frac{AH}{AD} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$



[4] [2020 岡山理科大]

(解説)

(1) $S = \frac{1}{2} bc \sin \angle A$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2(\sqrt{5} + 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{2}$$

(2) 余弦定理により $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$

$$= 2^2 + (\sqrt{5} + 1)^2 - 2 \cdot 2(\sqrt{5} + 1) \cdot \frac{1}{2} = 8$$

$a > 0$ であるから $a = 2\sqrt{2}$

(3) (1) と正弦定理により

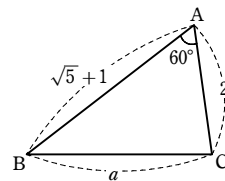
$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

よって $R = \frac{\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

(4) (2) から $a^2 + b^2 - c^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2^2 - (\sqrt{5} + 1)^2$
 $= (\sqrt{5} - 1)^2 > 0$

ゆえに $a^2 + b^2 > c^2$

よって、 $\angle C$ は鋭角である。



[5] [2020 立教大]

(解説)

(1) $\triangle ABC$ の外心を O , O から辺 CA に下ろした垂線を OD とすると $AC = 2AD$

また、 $AB = AC$ より $\angle OAC = \frac{1}{2} \angle CAB = \alpha$ が示されるから

$$AC = 2AD = 2(OA \cos \alpha) = 2 \cos \alpha$$

(2) 直線 OA と辺 BC の交点を E とすると、 E は辺 BC の中点であり、 $\angle OEC = 90^\circ$ となるから、(1) より $BC = 2CE$

$$= 2AC \sin \alpha = 4 \cos \alpha \sin \alpha$$

よって $l = AB + BC + CA$

$$= 2 \cdot 2 \cos \alpha + 4 \cos \alpha \sin \alpha = 4(1 + \sin \alpha) \cos \alpha$$

(3) (1) から $AE = AC \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha$

よって、(2) から

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AE$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cos \alpha \sin \alpha \cdot 2 \cos^2 \alpha = 4 \sin \alpha \cos^3 \alpha$$

(4) $S = \frac{1}{2} l r$ であるから $r = \frac{2S}{l}$

(5) (2), (3), (4) から

$$r = \frac{8 \sin \alpha \cos^3 \alpha}{4(1 + \sin \alpha) \cos \alpha}$$

$$= \frac{2(1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = 2(1 - \sin \alpha) \sin \alpha$$

[6] [2020 岡山理科大]

(解説)

(1) 辺 AD は平面 BCD に垂直であるから

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle BCD \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 = 8$$

(2) 三平方の定理により

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 2^2 + 6^2 = 40$$

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = 4^2 + 6^2 = 52$$

$\triangle ABC$ において、余弦定理から

$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{20 + 40 - 52}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$\sin \angle BAC > 0$ より $\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

したがって $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 14$

(3) (1), (2) と $V = \frac{1}{3} S d$ から $8 = \frac{1}{3} \cdot 14 d$ よって $d = \frac{12}{7}$