場合の数　基本編

$\boxed{1}$

60 人に数学と英語の試験を行った。数学，英語の合格者がそれぞれ 30 人，50 人で， 2 科目とも不合格の人は 8 人であった。次の人は何人か。

(1)　2 科目とも合格した人

(2)　数学だけ合格した人

解説

試験を受けた 60 人の集合を全体集合 U，数学の合格者の集合を A，英語の合格者の集合を B とする。条件から

$$n(U)=60,\quad n(A)=30,\quad n(B)=50,\quad n(\overline{A}\cap\overline{B})=8$$

(1)　$\overline{A}\cap\overline{B}$ は $\overline{A\cup B}$ に等しいから　　$n(\overline{A\cup B})=n(\overline{A}\cap\overline{B})=8$

よって　　$n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A\cup B})=60-8=52$

2 科目とも合格した人の集合は $A\cap B$ で表される。

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ であるから

$52=30+50-n(A\cap B)$　　　ゆえに　$n(A\cap B)=28$ (人)

(2)　数学だけ合格した人の集合は $A\cap\overline{B}$ で表される。その人数は

$$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=30-28=2 \text{ (人)}$$

$\boxed{2}$

集合 U の部分集合 A, B について，

$n(U)=50,\quad n(A)=20,\quad n(B)=15, n(A\cup B)=28$

であるとき，次の値を求めよ。

(1)　$n(A\cap B)$　　　　(2)　$n(\overline{A})$

(3)　$n(\overline{A}\cap\overline{B})$　　　　(4)　$n(\overline{A}\cup B)$

解説

(1)　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ から

$28=20+15-n(A\cap B)$　　　よって　　$n(A\cap B)=7$

(2)　$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=50-20=30$

(3)　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=50-28=22$

(4)　$\overline{A}\cup B=\overline{A}\cup(A\cap B)$

ここで，$\overline{A}\cap(A\cap B)=\phi$ であるから

$$n(\overline{A}\cup B)=n(\overline{A})+n(A\cap B)=30+7=37$$

$\boxed{3}$

次の式を展開したときの項の個数を求めよ。

(1)　$(a+b)(c+d+e+f)$

(2)　$(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$

解説

(1)　$(a+b)(c+d+e+f)$ を展開したときの各項は次の形になる。

(a か b の一方)$\times$(c，d，e，f のどれか 1 つ)

よって，展開したときの項の個数は　　$2\times4=8$ (個)

(2)　$(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ を展開したときの各項は次の形になる。

(a か b の一方)$\times$(c，d，e のどれか 1 つ)$\times$(f，g，h，i のどれか 1 つ)

よって，展開したときの項の個数は　　$2\times3\times4=24$ (個)

$\boxed{4}$

次の数について正の約数は何個あるか。また，その約数の総和を求めよ。

(1)　$2^2\cdot3^3$　　　　(2)　675

解説

(1)　$2^2\cdot3^3$ から，正の約数の個数は，$(2+1)(3+1)=12$ (個)

また，約数の総和は $(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)$ を展開すると，各項に $2^2\cdot3^3$ のすべての約数が現れる。

よって，求める総和は　$(1+2+4)(1+3+9+27)=7\times40=280$

(2)　$675=3^3\times5^2$ から，正の約数の個数は，$(3+1)(2+1)=12$ (個)

約数の総和は　$(1+3+3^2+3^3)(1+5+5^2)=40\times31=1240$

(3)　$81=3^4$ から，正の約数の個数は　$4+1=5$ (個)

約数の総和は　$1+3+3^2+3^3+3^4=121$

(4)　$360=2^3\times3^2\times5$ から，正の約数の個数は，$(3+1)(2+1)(1+1)=24$ (個)

約数の総和は　$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=15\times13\times6=1170$

$\boxed{5}$

3 桁の自然数のうち，次の場合は何通りあるか。

(1)　各位の数の和が奇数

(2)　各位の数の積が偶数

解説

(1)　各位の数の和が奇数になるのは，次の 2 つの場合がある。

[1]　各位がすべて奇数の場合

$5\times5\times5=125$ (通り)

[2]　1 つの位だけが奇数の場合

一の位が奇数のとき，百の位は 0 とならないので　$4\times5\times5=100$ (通り)

十の位が奇数のときも同様に　$4\times5\times5=100$ (通り)

百の位が奇数のとき　$5\times5\times5=125$ (通り)

[1]，[2] から，求める場合の数は

$125+(100+100+125)=450$ (通り)

(2)　各位の数の積が偶数になるのは，各位の少なくとも 1 つが偶数であればよい。

よって，求める場合の数は，3 桁の自然数全体から各位すべて奇数の場合を引けばよい。

各位すべて奇数の場合の数は　$5\times5\times5$ より

求める場合の数は　$9\times10\times10-5\times5\times5=775$ (通り)

$\boxed{6}$

improve の文字をすべて用いる順列の中で，次の

場合は何通りあるか。

(1)　i と m が隣り合う

(2)　i と m が隣り合わない

(3)　i と m と p が続いて並ぶ

(4)　i と m と p のどの 2 つも隣り合わない

(5)　i と m の間に文字が 2 つある

(解説)

(1)　i と m をまとめた 1 つと，残り 5 文字の，6 個の順列で　${}_6P_6$ 通り。
そのおのおのに対して，i と m の並び方は　2 通り。
よって，積の法則により　${}_6P_6\times{}_2P_2=6!\times2=1440$ (通り)

(2)　(7 文字すべての順列)－(1) が求める並べ方であるから
${}_7P_7-1440=7!-1440=5040-1440=3600$ 通り

(3)　i と m と p をまとめた 1 つと，残り 4 文字の，5 個の順列で　${}_5P_5$ 通り。
そのおのおのに対して，i と m と p の並び方は　${}_3P_3$ 通り。
よって，積の法則により　${}_5P_5\times{}_3P_3=5!\times3!=720$ (通り)

(4)　i，m，p 以外の 4 文字の間とその両端の 5 か所から 3 か所を選んで，i，m，p の 3 文字を並べる並べ方は　${}_5P_3$
i，m，p 以外の 4 文字の並べ方は　${}_4P_4$ 通り。
よって，積の法則により　${}_5P_3\times{}_4P_4={}_5P_3\times4!=60\times24=1440$ (通り)

(5)　i と m の間の 2 文字は，i，m 以外の 5 文字から 2 つ選んで並べる並べ方で
${}_5P_2$ 通り。
i と m を入れ替えて　${}_5P_2\times2$ 通り。
また，i□□m の 4 文字を 1 文字とみて，残り 3 文字と合わせた，4 個の順列は
${}_4P_4$ 通り。
よって　${}_5P_2\times2\times{}_4P_4={}_5P_2\times2\times4!=20\times2\times24=960$ (通り)

7

(1)　10 人を A または B の 2 部屋に入れる方法は何通りあるか。ただし，全員を 1 つの部屋へ入れてもよい。

(2)　10 人を 2 つのグループ A，B に分ける方法は何通りあるか。

(3)　10 人を 2 つのグループに分ける方法は何通りあるか。

(解説)

(1)　10 人のそれぞれが A，B 2 通りの部屋の選び方があるから
$2^{10}=1024$ (通り)

(2)　(1) で，A または B が 0 人になる場合を除いた分け方であるから
$1024-2=1022$ (通り)

(3)　(2) で，グループ A，B の区別をなくして
$1022\div2=511$ (通り)

8

正十角形について，次の数を求めよ。

(1)　正十角形の頂点のうちの 3 点を頂点とする三角形の個数

(2)　正十角形の頂点のうちの 4 点を頂点とする四角形の個数

(3)　正十角形の頂点のうちの 2 点を結ぶ線分の本数

(4)　対角線の本数

(解説)

(1)　10 個の頂点の中から 3 個を選ぶから ${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$ (個)

(2)　10 個の頂点の中から 4 個を選ぶから ${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$ (個)

(3)　10 個の頂点の中から 2 個を選ぶから ${}_{10}C_2=\dfrac{10\cdot9}{2\cdot1}=45$ (本)

(4)　(3) で求めた線分のうち，辺である 10 本は対角線ではないので，対角線の数は
${}_{10}C_2-10=35$ (本)

別解　1 つの頂点から $(10-3)$ 本の対角線がひける。頂点の数は 10 個で，対角線は 2 個の頂点を結ぶから 2 度数えている。よって $7\cdot10\cdot\dfrac{1}{2}=35$ (本)

9

男子 4 人，女子 6 人から 4 人の委員を選ぶとき

(1)　全部で何通りの方法があるか。

(2)　男子の委員 2 人，女子の委員 2 人を選ぶ方法は何通りあるか。

(3)　男子が少なくとも 1 人含まれる方法は何通りあるか。

解説

(1)　男女合わせた 10 人から 4 人を選ぶから

$${}_{10}C_4=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210\text{（通り）}$$

(2)　男子 4 人から委員 2 人を選ぶ方法は　${}_4C_2$ 通り

女子 6 人から委員 2 人を選ぶ方法は　${}_6C_2$ 通り

よって，求める委員の選び方は

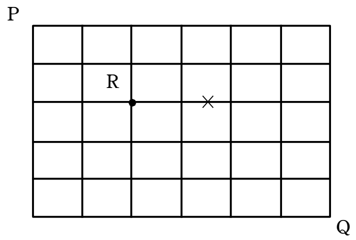
$${}_4C_2\times{}_6C_2=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\times\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=90\text{（通り）}$$

(3)　すべて女子が選ばれる方法は ${}_6C_4=\frac{5\cdot 6}{2\cdot 1}=15$（通り）

よって，求める選び方は (1) $-{}_6C_4$ から　$210-15=195$（通り）

10

右の図のような道のある町で，P から Q まで遠回りをしないで行くのに，次の場合の道順の総数を求めよ。



(1)　R を通っていく。

(2)　×印の箇所は通らないで行く。

(3)　R を通り，×印の箇所は通らないで行く。

解説

(1)　右へ 1 区画進むことを → で，下へ 1 区画進むことを ↓ で表す。

P から R まで行く最短の道順は，→ 2 個と ↓ 2 個の順列で表されるから

$\frac{4!}{2!2!}$ 通り

R から Q まで行く最短の道順は，→ 4 個と ↓ 3 個の順列で表されるから

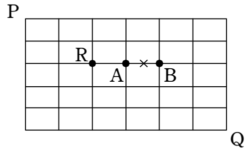
$\frac{7!}{4!3!}$ 通り

よって，R を通って行く最短の道順の総数は

$$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{7!}{4!3!}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\times\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=210\text{（通り）}$$

(2)　求める道順の総数は，P から Q まで行く最短の道順の総数から，×印の箇所を通って行く道順を除けばよい。

右の図のように 2 点 A，B をとると，× 印の箇所を通る経路は　P → A → B → Q



P から A まで行く最短の道順は　$\frac{5!}{3!2!}$ 通り

A から B まで行く最短の道順は　1 通り

B から Q まで行く最短の道順は　$\frac{5!}{2!3!}$ 通り

よって，×印の箇所を通る最短の道順は

$$\frac{5!}{3!2!}\times 1\times\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\times\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=100\text{（通り）}$$

また，P から Q まで行く最短の道順の総数は

$$\frac{11!}{6!5!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=462\text{（通り）}$$

したがって，×印の箇所を通らないで行く最短の道順の総数は

$462-100=362$（通り）

(3)　R を通って行く最短の道順の総数から，R を通り×印の箇所を通って行く道順を除けばよい。

R を通り×印の箇所を通る経路は P → R → A → B → Q であるから

$$\frac{4!}{2!2!}\times 1\times 1\times\frac{5!}{2!3!}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\times\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=60\text{（通り）}$$

R を通って行く最短の道順の総数は，(1) から

210 通り

よって，R を通り，×印の箇所は通らないで行く最短の道順の総数は

$210-60=150$（通り）

11

桃，かき，ミカンの 3 種類の果物がそれぞれたくさんある。この中から 7 個を選ぶ方法は何通りあるか。ただし，選ばない果物があってもよい。

解説

異なる 3 種類の果物から，重複を許して 7 個取る重複組合せであるから，

$${}_{3-1+7}C_7={}_9C_7=36\text{（通り）}$$