微分と積分　入試の基本

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$

(1)　関数 $f(x)=3x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めよう。h が0でないとき，x が a から $a+h$ まで変化する場合の $f(x)$ の平均変化率は $\boxed{\text{ア}}a+\boxed{\text{イ}}h$ である。

したがって，求める微分係数は　$f'(a)=\lim\limits_{h\to\boxed{\text{ウ}}}\left(\boxed{\text{ア}}a+\boxed{\text{イ}}h\right)=\boxed{\text{エオ}}$ である。

(2)　曲線 $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+2x$ 上の点 $\left(2,\ \boxed{\text{カ}}\right)$ における接線の方程式は

$y=\boxed{\text{キ}}x-\boxed{\text{ク}}$ である。

(3)　関数 $f(x)=-x^3-3x^2+9x+10$ は $x=\boxed{\text{ケ}}$ で極大値 $\boxed{\text{コサ}}$ をとり，$x=\boxed{\text{シス}}$ で極小値 $\boxed{\text{セソタ}}$ をとる。

(4) $\int(3x^2-4x+1)dx=x^{\boxed{チ}}-\boxed{\text{ツ}}x^{\boxed{テ}}+x+C$ (C は積分定数) であり，

$\int_1^4(x^2+2x-6)dx=\boxed{\text{トナ}}$ である。

$\boxed{2}$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，$g(x)=-x^2+x+1$ とする。座標平面上の 2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は点 $(1,\ 1)$ において共通な接線 ℓ をもつという。

(1) このとき，$\boxed{\boxed{\text{ア}}}$ と $\boxed{\boxed{\text{イ}}}$ が同時に成り立つ。

$\boxed{\boxed{\text{ア}}}$，$\boxed{\boxed{\text{イ}}}$ の解答群

（同じものを繰り返し選んではいけないものとする。また，解答の順序は問わない。）

⓪ $f(1)=g(1)$	① $f(1)=g'(1)$	② $f'(1)=g(1)$	③ $f'(1)=g'(1)$

(2) (1) により，$b=\boxed{\text{ウエ}}a-\boxed{\text{オ}}$，$c=a+\boxed{\text{カ}}$ が成り立つ。さらに，直線 ℓ と曲線 $y=f(x)$ が点 $(1,\ 1)$ 以外に共有点をもたないとき，$a=\boxed{\text{キク}}$，$b=\boxed{\text{ケ}}$，$c=\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{3}$ [改訂版数標準プラン100 センター追試(改作)]

関数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$ について考える。

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^2-\boxed{\text{イウ}}x+\boxed{\text{エオ}}$ であり，$f(x)$ は $x=\boxed{\text{カ}}$ で極大値，$x=\boxed{\text{キ}}$ で極小値をとる。

よって，$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{クケ}}$ である。

また，方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数は $\boxed{\text{コ}}$ 個である。

$\boxed{4}$ [改訂版数標準プラン100 センター本試(改作)]

座標平面上の放物線 $y=3x^2$ を C とし，放物線 $y=x^2-2x+4$ を D とする。また，2つの放物線 C，D の交点を A，B とする。ただし，x 座標の小さい方を A とする。

点 A，B の x 座標はそれぞれ $\boxed{\text{アイ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ である。

P を放物線 D 上の点とし，P の x 座標を a とする。P から x 軸に引いた垂線と放物線 C との交点を H とする。このとき，点 H の y 座標は $\boxed{\text{エ}}\,a^{\boxed{\text{オ}}}$ である。

$\boxed{\text{アイ}}<a<\boxed{\text{ウ}}$ のとき，$\text{PH}=-\boxed{\text{カ}}\,a^2-\boxed{\text{キ}}\,a+\boxed{\text{ク}}$ であり，$\triangle\text{PHB}$ の面積 $S(a)$ は $S(a)=a^{\boxed{\text{ケ}}}-\boxed{\text{コ}}\,a+\boxed{\text{サ}}$ と表される。

したがって，$S(a)$ は $a=\boxed{\text{シス}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる。

$\boxed{5}$ [改訂版数標準プラン100 センター本試(改作)]

座標平面上の曲線 $y=x^3-3x$ を C とする。C 上の点 $(a,\ a^3-3a)$ における接線が点 A $(1,\ b)$ を通るとき，$b=\boxed{\text{アイ}}a^{\boxed{\text{ウ}}}+\boxed{\text{エ}}a^{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}$ が成り立つ。

また，$f(a)=\boxed{\text{アイ}}a^{\boxed{\text{ウ}}}+\boxed{\text{エ}}a^{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}$ とすると，関数 $f(a)$ は $a=\boxed{\text{キ}}$ で極大になり，$a=\boxed{\text{ク}}$ で極小になる。

したがって，点 A を通る C の接線の本数が 2 本となるのは，$b=\boxed{\text{ケコ}}$ または $b=\boxed{\text{サシ}}$ のときである。ただし，$\boxed{\text{ケコ}}$，$\boxed{\text{サシ}}$ の解答の順序は問わない。

$\boxed{6}$

関数 $f(x)$ が $f(x)=3x^2+4x\int_{-1}^{0}f(t)\,dt-2\int_{1}^{3}f(t)\,dt$ を満たすとする。

a，b を定数として，$\int_{-1}^{0}f(t)\,dt=a$ ……①，$\int_{1}^{3}f(t)\,dt=b$ ……② とおくと，①，② から $\boxed{\text{ア}}\,a+\boxed{\text{イ}}\,b=1$，$\boxed{\text{ウエ}}\,a-5b=\boxed{\text{オカキ}}$ が成り立つ。

よって，$f(x)=3x^2-\boxed{\text{ク}}\,x-\boxed{\text{ケ}}$ であり，$\int_{0}^{3}|f(x)|\,dx=\boxed{\text{コサ}}$ である。

$\boxed{7}$ [改訂版数標準プラン100 センター本試(改作)]

座標平面上の放物線 $y=x^2-2x$ を C とし，C 上の点 P の x 座標を t とする。ただし，$t>2$ とする。また，点 P における C の接線を ℓ_1 とし， 原点 O における C の接線を ℓ_2 とする。

このとき，ℓ_1 の方程式は $y=\boxed{\text{ア}}\left(t-\boxed{\text{イ}}\right)x-t^{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，ℓ_1 と ℓ_2 の交点を Q とすると，点 Q の x 座標は $\dfrac{t}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

また，直線 $x=\dfrac{t}{\boxed{\text{エ}}}$ と ℓ_2 と C で囲まれた図形の面積 S_1 は $S_1=\dfrac{t^{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ であり， 2 直線 ℓ_1，ℓ_2 と C で囲まれた図形の面積 S_2 は $S_2=\dfrac{t^{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

したがって，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

$\boxed{8}$

座標平面上の曲線 $y=x^3+x^2-2x$ を C とする。

(1)　曲線 C と x 軸の交点の座標は，$\left(\boxed{\text{アイ}},\ 0\right)$，$\left(\boxed{\text{ウ}},\ 0\right)$，$\left(\boxed{\text{エ}},\ 0\right)$ である。

ただし，$\boxed{\text{ウ}} < \boxed{\text{エ}}$ とする。

(2)　(1) の点 $\left(\boxed{\text{エ}},\ 0\right)$ における曲線 C の接線 ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{オ}}\,x-\boxed{\text{カ}}$ であり，この接線 ℓ と曲線 C の接点以外の共有点の x 座標は $\boxed{\text{キク}}$ である。

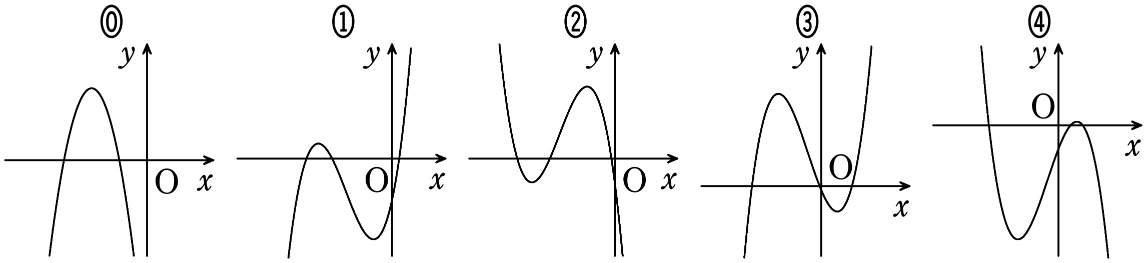
(3)　曲線 C と接線 ℓ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

$\boxed{9}$

関数 $F(x)$ に対し，$f(x)=F'(x)$ とする。$f(x)$ は 2 次関数であり，$y=f(x)$ のグラフは 3 点 $(-3,\ 0)$，$(-2,\ 3)$，$(-1,\ 0)$ を通る。また，$y=F(x)$ のグラフは点 $(0,\ -1)$ を通るという。

(1)　$f(x)=\boxed{\text{アイ}}\left(x+\boxed{\text{ウ}}\right)\left(x+\boxed{\text{エ}}\right)$ と表される。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答の順序は問わない。

(2)　$y=F(x)$ のグラフの概形として最も適当なものを，次の ⓪ ～ ④ のうちから一つ選べ。$\boxed{\boxed{\text{オ}}}$



また，$y=F(x)$ は $x=\boxed{\text{カキ}}$ のときに極大値 $\boxed{\text{ク}}$ をとる。

(3)　$F(x)=\displaystyle\int_k^x f(t)dt+1$ を満たすような定数 k のうち，最小のものは

$k=\boxed{\text{ケコ}}-\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である。

$\boxed{10}$

正の定数 p に対して，$f(x)=x^2-(p+4)x+4p$ とし，座標平面上の放物線 $y=f(x)$ を C とする。また，2 点 $(0,\ 4p)$，$(4,\ 0)$ をそれぞれ A，B とする。

(1)　点 A における曲線 C の接線を ℓ とする。$p=2$ のとき，接線 ℓ の方程式は

$y=\boxed{\text{アイ}}x+\boxed{\text{ウ}}$ であるから，C と ℓ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2)　点 B における曲線 C の接線を m とする。接線 m の方程式は

$y=\left(\boxed{\text{カ}}-p\right)x+\boxed{\text{キ}}p-\boxed{\text{クケ}}$ である。また，C と m と y 軸で囲まれた図形の面積を S_m とすると，$0<p<4$ の範囲で S_m は $\boxed{\text{コ}}$。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群（q は $0<q<4$ を満たす定数とする。）

⓪　つねに増加する　　①　つねに減少する　　②　一定の値 $\dfrac{32}{3}$ である

③　一定の値 $\dfrac{64}{3}$ である　　④　$0<p<q$ で増加し，$q<p<4$ で減少する

⑤　$0<p<q$ で減少し，$q<p<4$ で増加する

(3) C と x 軸と y 軸で囲まれた図形の面積を S，C と x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。

(i) $0<p<4$ のとき $\int_0^4 f(x)dx=$ $\boxed{\text{サ}}$，$p>4$ のとき $\int_0^4 f(x)dx=$ $\boxed{\text{シ}}$ がそれぞれ p の値に関係なく成り立つ。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪	0	①	S	②	T	③	$-S$	④	$-T$
⑤	$S+T$	⑥	$S-T$	⑦	$-S+T$	⑧	$-S-T$		

(ii) $0<p<4$ とする。S と T が等しいとき，$p=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(iii) $0<p<4$ とする。直線 AB の方程式を $y=g(x)$ とし，C と直線 AB で囲まれた図形の面積を U とすると，$\int_0^4 g(x)dx=$ $\boxed{\text{ソ}}$ が p の値に関係なく成り立つ。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪	$S+T+U$	①	$-S+T+U$	②	$S-T+U$	③	$S+T-U$
④	$-S-T+U$	⑤	$-S+T-U$	⑥	$S-T-U$	⑦	$-S-T-U$