微分と積分　入試の基本

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$

(解説)

(1)　x が a から $a+h$ まで変化するときの $f(x)=3x^2$ の平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{3(a+h)^2-3a^2}{h}=\frac{6ah+3h^2}{h}=6a+3h$$

したがって，求める微分係数は　$f'(a)=\lim_{h\to 0}(6a+3h)=6a$

(2)　$y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+2x$ に $x=2$ を代入すると　$y=\frac{1}{4}\cdot 2^4-2\cdot 2^2+2\cdot 2=0$

$y'=x^3-4x+2$ であるから，点 $(2,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y-0=(2^3-4\cdot 2+2)(x-2)\qquad \text{よって}\quad y=2x-4$$

(3)　$f'(x)=-3x^2-6x+9=-3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-3,\ 1$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-17	$\nearrow$	15	$\searrow$

ゆえに，$f(x)$ は $x=1$ で 極大値 15，$x=-3$ で 極小値 -17 をとる。

(4)　$\int(3x^2-4x+1)dx=x^3-2x^2+x+C$　(C は積分定数)

$$\int_1^4(x^2+2x-6)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-6x\right]_1^4=\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3+4^2-6\cdot 4\right)-\left(\frac{1}{3}+1-6\right)=18$$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が点 $(1,\ 1)$ において共通な接線をもつから，

$f(1)=g(1)$ と $f'(1)=g'(1)$ が同時に成り立つ。　(⓪，③)

(2)　$f'(x)=3x^2+2ax+b$，$g'(x)=-2x+1$

$f(1)=g(1)$，$f'(1)=g'(1)$ から

$1+a+b+c=1$　すなわち　$a+b+c=0$ ……①

$3+2a+b=-1$　すなわち　$2a+b=-4$ ……②

①，② から　$b=-2a-4$ ……③，$c=a+4$ ……④

また，直線 ℓ の方程式は　$y-1=(-2\cdot 1+1)(x-1)$　すなわち　$y=-x+2$

また，$x^3+ax^2+bx+c=-x+2$ とすると，③，④ から

$$x^3+ax^2-(2a+4)x+a+4=-x+2$$

よって　$x^3+ax^2-(2a+3)x+a+2=0$　……⑤

⑤ を変形すると　$(x-1)^2(x+a+2)=0$　　ゆえに　$x=1,\ -a-2$

直線 ℓ と曲線 $y=f(x)$ が点 $(1,\ 1)$ 以外に共有点をもたないから，方程式 ⑤ の実数解は $x=1$ だけである。

よって　$-a-2=1$　　ゆえに　$a=-3$

これを ③，④ に代入すると　$b=2$，$c=1$

$\boxed{3}$ [改訂版数標準プラン100 センター追試(改作)]

(解説)

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)=6(x-1)(x-2)$$

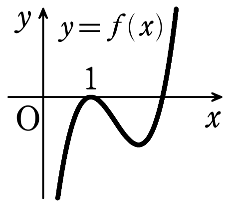
$f'(x)=0$ とすると　$x=1$，2

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

ゆえに，$f(x)$ は $x=1$ で極大値，$x=2$ で極小値をとる。

ここで，$f(0)=-5$ であるから，$x\geqq 0$ の範囲における $f(x)$ の最小値は -5 である。



また，方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数に一致する。

よって，求める解の個数は，右の図から 2 個である。

$\boxed{4}$ [改訂版数標準プラン100 センター本試(改作)]

(解説)

$y=3x^2$ と $y=x^2-2x+4$ の交点の x 座標は，方程式 $3x^2=x^2-2x+4$ すなわち $x^2+x-2=0$ の解である。

よって　$(x+2)(x-1)=0$　　ゆえに　$x=-2$，1

したがって，2 点 A，B の x 座標はそれぞれ　-2，1

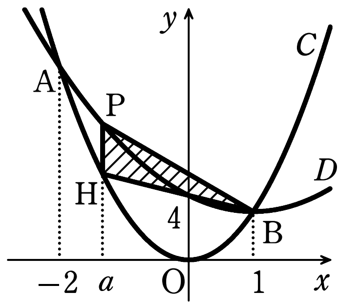
点 H は，放物線 $y=3x^2$ 上にあり，かつ x 座標が a であるから，y 座標は　$3a^2$

よって，点 H の座標は　$(a,\ 3a^2)$

また，点 P の座標は　$(a,\ a^2-2a+4)$

ゆえに，$-2<a<1$ のとき，右の図から

$$\mathrm{PH}=(a^2-2a+4)-3a^2=-2a^2-2a+4$$



よって，線分 PH を △PHB の底辺と考えると，△PHB の高さは $1-a$ であるから

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PH}\cdot(1-a)=\frac{1}{2}\cdot(-2a^2-2a+4)(1-a)$$

$$=(a^2+a-2)(a-1)=a^3-3a+2$$

ゆえに　$S'(a)=3a^2-3=3(a+1)(a-1)$

$S'(a)=0$ とすると　$a=-1$，1

$-2<a<1$ における $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

したがって，$S(a)$ は $a=-1$ のとき最大値 4 をとる。

$\boxed{5}$ [改訂版数標準プラン100 センター本試(改作)]

(解説)

$y=x^3-3x$ から　$y'=3x^2-3$

よって，C 上の点 $(a,\ a^3-3a)$ における接線の方程式は　$y-(a^3-3a)=(3a^2-3)(x-a)$

すなわち　$y=3(a^2-1)x-2a^3$　……①

また，接線①が点 A $(1,\ b)$ を通るとき　$b=3(a^2-1)\cdot 1-2a^3$

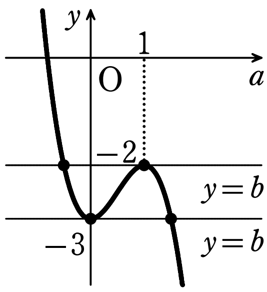
ゆえに　$b=-2a^3+3a^2-3$　……②

$f(a)=-2a^3+3a^2-3$ とすると　$f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$

$f'(a)=0$ とすると　$a=0,\ 1$

よって，$f(a)$ の増減表は次のようになる。

a	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(a)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$



ゆえに，$f(a)$ は $a=1$ で極大になり，$a=0$ で極小になる。
このとき，$y=f(a)$ のグラフは，右の図のようになり，点 A を通る C の接線の本数が 2 本になるための条件は，$y=f(a)$ のグラフと直線 $y=b$ が相異なる 2 つの共有点をもつことである。
よって，グラフから　$b=-3$　または　$b=-2$

$\boxed{6}$

(解説)

①，② から　$f(x)=3x^2+4ax-2b$　……③

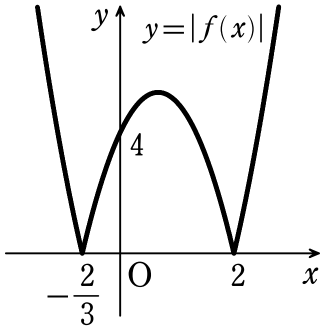
よって　$\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{-1}^{0}(3t^2+4at-2b)\,dt=\Big[t^3+2at^2-2bt\Big]_{-1}^{0}=1-2a-2b$

$\displaystyle\int_{1}^{3} f(t)\,dt=\int_{1}^{3}(3t^2+4at-2b)\,dt=\Big[t^3+2at^2-2bt\Big]_{1}^{3}=16a-4b+26$

ゆえに　$a=1-2a-2b,\ b=16a-4b+26$　　よって　$3a+2b=1,\ 16a-5b=-26$

これらを連立させて解くと　$a=-1,\ b=2$　　ゆえに　$f(x)=3x^2-4x-4$

また，$f(x)=(3x+2)(x-2)$ であるから



$x \leqq -\dfrac{2}{3}$，$2 \leqq x$ のとき　$|f(x)|=f(x)=3x^2-4x-4$

$-\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq 2$ のとき　$|f(x)|=-f(x)=-(3x^2-4x-4)$

よって　$\displaystyle\int_0^3 |f(x)|dx$

$$=\int_0^2 \{-(3x^2-4x-4)\}dx+\int_2^3 (3x^2-4x-4)dx$$

$$=-\Big[x^3-2x^2-4x\Big]_0^2+\Big[x^3-2x^2-4x\Big]_2^3$$

$$=-(2^3-2\cdot2^2-4\cdot2)+3^3-2\cdot3^2-4\cdot3-(2^3-2\cdot2^2-4\cdot2)=13$$

$\boxed{7}$ [改訂版数標準プラン100 センター本試(改作)]

(解説)

$y=x^2-2x$ から　$y'=2x-2$

ゆえに，接線 ℓ_1 の方程式は　$y-(t^2-2t)=(2t-2)(x-t)$　　よって　$y=2(t-1)x-t^2$

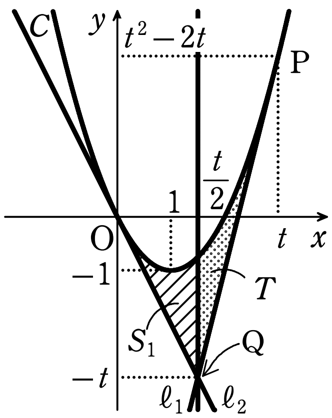
また，接線 ℓ_2 の方程式は　$y-0=(2\cdot0-2)(x-0)$　　よって　$y=-2x$

したがって，ℓ_1，ℓ_2 の交点 Q の x 座標は，方程式

$2(t-1)x-t^2=-2x$ すなわち $2tx=t^2$ の解である。

$t>2$ から　$x=\dfrac{t}{2}$　　ゆえに，点 Q の x 座標は　$\dfrac{t}{2}$

また，右の図から



$$S_1=\int_0^{\frac{t}{2}}\{(x^2-2x)-(-2x)\}dx=\int_0^{\frac{t}{2}}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{t}{2}}=\frac{t^3}{24}$$

さらに，直線 $x=\dfrac{t}{2}$，接線 ℓ_1 と C で囲まれた部分の面積を

T とすると，図から

$$T=\int_{\frac{t}{2}}^{t}[x^2-2x-\{2(t-1)x-t^2\}]dx=\int_{\frac{t}{2}}^{t}(x^2-2tx+t^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}-tx^2+t^2x\right]_{\frac{t}{2}}^{t}=\frac{t^3}{24}$$

よって　$S_2=S_1+T=\dfrac{t^3}{24}+\dfrac{t^3}{24}=\dfrac{t^3}{12}$　　したがって　$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{t^3}{24}\div\dfrac{t^3}{12}=\dfrac{1}{2}$

参考　一般に，$\displaystyle\int(x-\alpha)^2dx=\frac{(x-\alpha)^3}{3}+C$ が成り立つ。

ただし，C は積分定数である。このことを用いると，面積 T は次のように求められる。

$$T=\int_{\frac{t}{2}}^{t}(x-t)^2dx=\left[\frac{(x-t)^3}{3}\right]_{\frac{t}{2}}^{t}=\frac{t^3}{24}$$

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　曲線 C と x 軸との交点の x 座標は $x^3+x^2-2x=0$ の解であるから　$x(x^2+x-2)=0$

$x(x-1)(x+2)=0$　　ゆえに　$x=-2,\ 0,\ 1$

よって，曲線 C と x 軸の交点の座標は　$(-2,\ 0),\ (0,\ 0),\ (1,\ 0)$

(2)　$y=x^3+x^2-2x$ から　$y'=3x^2+2x-2$

ゆえに，点 $(1,\ 0)$ における接線 ℓ の方程式は　$y-0=(3\cdot 1^2+2\cdot 1-2)(x-1)$

よって　$y=3x-3$

接線 ℓ と曲線 C の交点の x 座標は，$x^3+x^2-2x=3x-3$ の解であるから

$x^3+x^2-5x+3=0$

$(x-1)^2(x+3)=0$　　ゆえに　$x=1,\ -3$

したがって，点 $(1,\ 0)$ における接線 ℓ と曲線 C の接点以外の共有点の x 座標は　-3

(3)　曲線 C と接線 ℓ で囲まれた図形の面積は

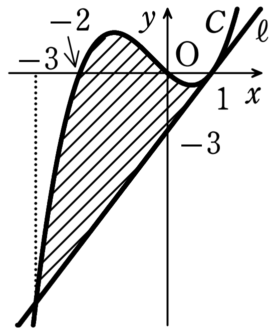
$$\int_{-3}^{1}\{(x^3+x^2-2x)-(3x-3)\}dx=\int_{-3}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{-3}^{1}=\frac{64}{3}$$

別解　p.114 の基本事項 12 番から，曲線 C と接線 ℓ で囲まれた部分の面積は

$$\int_{-3}^{1}\{(x^3+x^2-2x)-(3x-3)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)^2dx=\frac{1}{12}\{1-(-3)\}^4=\frac{64}{3}$$



$\boxed{9}$

解説

(1)　$f(x)$ は 2 次関数であり，$y=f(x)$ のグラフが点 $(-3,\ 0),\ (-1,\ 0)$ を通るから，a を定数として，$f(x)=a(x+3)(x+1)$ と表される。$y=f(x)$ のグラフは点 $(-2,\ 3)$ も通るから　$f(-2)=3$

よって　$3=a(-2+3)(-2+1)$　　ゆえに　$a=-3$

したがって　$f(x)=-3(x+1)(x+3)$　……①

(2)　$F(x)=\int f(x)dx=-\int 3(x+1)(x+3)dx=-\int(3x^2+12x+9)dx$

$=-x^3-6x^2-9x+C$　（C は積分定数）

$y=F(x)$ のグラフが点 $(0,\ -1)$ を通るから　$F(0)=-1$　　よって　$C=-1$

ゆえに　$F(x)=-x^3-6x^2-9x-1$

$F'(x)=0$ すなわち $f(x)=0$ とすると，① から　$x=-1,\ -3$

よって，$F(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	-1	↗	3	↘

ゆえに，$y=F(x)$ のグラフの概形は ② のようになる。また，$F(x)$ は $x=-1$ のとき極大値 3 をとる。

(3)　$F(x)=\int_k^x f(t)dt+1$ ……② において，$x=k$ とすると，$\int_k^k f(t)dt=0$ から　$F(k)=1$

よって　$-k^3-6k^2-9k-1=1$　　ゆえに　$k^3+6k^2+9k+2=0$

よって　$(k+2)(k^2+4k+1)=0$　　ゆえに　$k=-2,\ k^2+4k+1=0$

$k^2+4k+1=0$ を解くと　$k=-2\pm\sqrt{3}$

よって，② を満たす最小の定数 k は　$k=-2-\sqrt{3}$

$\boxed{10}$

(解説)

(1)　$p=2$ のとき　$f(x)=x^2-6x+8$　　よって　$f'(x)=2x-6$

$f'(0)=-6$ であるから，接線 ℓ の方程式は

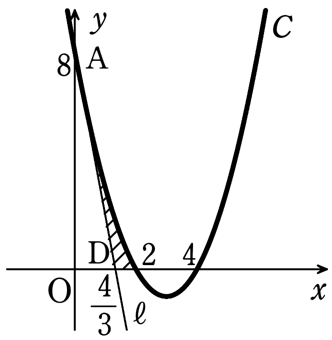
$$y-8=-6(x-0)\quad すなわち\quad y=-6x+8$$

$-6x+8=0$ とすると　$x=\dfrac{4}{3}$

ゆえに，ℓ と x 軸の交点を D とすると　$\mathrm{D}\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$

また，$x^2-6x+8=0$ とすると，$(x-2)(x-4)=0$ から　$x=2,\ 4$

図から，求める面積は



$$\int_0^2 f(x)dx-\triangle\mathrm{OAD}=\int_0^2(x^2-6x+8)dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot8$$

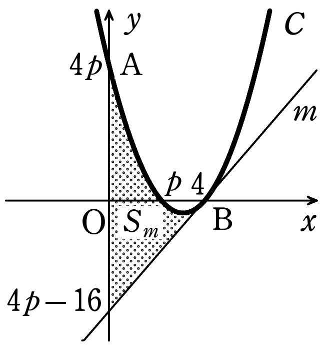
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right]_0^2-\frac{16}{3}=\frac{20}{3}-\frac{16}{3}=\frac{4}{3}$$

(2)　$f'(x)=2x-(p+4)$

よって　$f'(4)=8-(p+4)=4-p$

ゆえに，接線 m の方程式は　$y-0=(4-p)(x-4)$

すなわち　$y=(4-p)x+4p-16$



図から　$S_m=\int_0^4[x^2-(p+4)x+4p-\{(4-p)x+4p-16\}]dx$

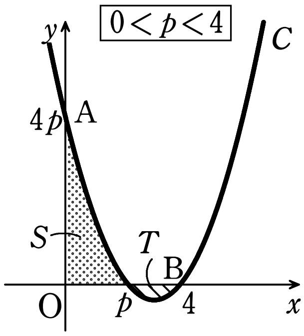
$$=\int_0^4(x^2-8x+16)dx=\left[\frac{x^3}{3}-4x^2+16x\right]_0^4=\frac{64}{3}$$

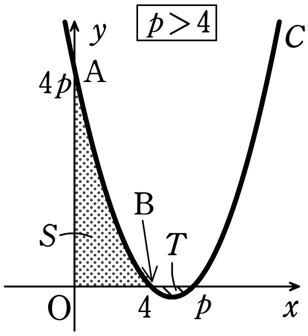
すなわち，S_m は一定の値 $\dfrac{64}{3}$ である。　(③)

参考　$S_m=\int_0^4(x^2-8x+16)dx=\int_0^4(x-4)^2dx=\left[\dfrac{(x-4)^3}{3}\right]_0^4=\dfrac{64}{3}$

と計算してもよい。

(3)　(i)　$0<p<4$，$p>4$ それぞれの場合の $y=f(x)$ のグラフは図のようになる。





よって，$0<p<4$ のとき　$S=\int_0^p f(x)\,dx$，$T=\int_p^4\{-f(x)\}dx=-\int_p^4 f(x)\,dx$

ゆえに　$\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^p f(x)\,dx+\int_p^4 f(x)\,dx=S-T$　（⑥）

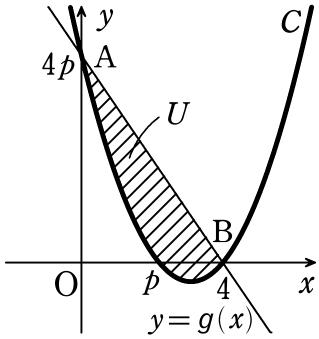
$p>4$ のとき　$S=\int_0^4 f(x)\,dx$　すなわち　$\int_0^4 f(x)\,dx=S$　（①）

(ii)　$0<p<4$ のとき，$S=T$ すなわち $S-T=0$ ならば，(i) から　$\int_0^4 f(x)\,dx=0$

よって　$\int_0^4\{x^2-(p+4)x+4p\}dx=0$　　ゆえに　$\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(p+4)x^2+4px\right]_0^4=0$

よって　$\frac{64}{3}-8(p+4)+16p=0$　　これを解いて　$p=\frac{4}{3}$

(iii)　図から　$U=\int_0^4\{g(x)-f(x)\}dx$



すなわち　$\int_0^4 g(x)\,dx-\int_0^4 f(x)\,dx=U$

(i) から　$\int_0^4 f(x)\,dx=S-T$

この 2 式を加えると　$\int_0^4 g(x)\,dx=S-T+U$　（②）