数列　入試の基本

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$

(1)　初項 3，公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{\text{ア}}\,n+\boxed{\text{イ}}$ で，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_n=n^2+\boxed{\text{ウ}}\,n$ である。

(2)　初項 4，公比 3 の等比数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\boxed{\text{エ}}\cdot\boxed{\text{オ}}^{\,n-1}$ で，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_n=\boxed{\text{カ}}\left(\boxed{\text{キ}}^{\,n}-\boxed{\text{ク}}\right)$ である。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k=\boxed{\text{ケコ}}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2=\boxed{\text{サシス}}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}k^3=\boxed{\text{セソタ}}$，$\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

$\boxed{2}$ [最新版数標準プラン100 センター本試(改作)]

$\{a_n\}$ を $a_6=85$，$a_{12}=67$ である等差数列とし，自然数 n に対して，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする。

このとき，$a_1=\boxed{\text{アイウ}}$ であり，数列 $\{a_n\}$ の公差は $\boxed{\text{エオ}}$ である。したがって，

$a_n=\boxed{\text{カキ}}\,n+\boxed{\text{クケコ}}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ である。ゆえに，$a_n=10$ となるのは

$n=\boxed{\text{サシ}}$ のときである。

また，$S_n=\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}n^2+\dfrac{\boxed{\text{タチツ}}}{\boxed{\text{テ}}}n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ であるから，S_n が負となる最小の n は $n=\boxed{\text{トナ}}$ である。さらに，S_n が最大となる n は $n=\boxed{\text{ニヌ}}$ である。

$\boxed{3}$ [最新版数標準プラン100 センター本試(改作)]

次の問題に関する太郎さんと花子さんの会話を読んで，(1) ～ (3) の問いに答えよ。

問題 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，次のように表される。

$$S_n = n^2 - 22n + 3 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

このとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

花子：$n \geqq 2$ のとき，$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n = \boxed{\text{ア}} + a_n$ であるから，

$a_n = S_n - \boxed{\text{ア}}$ ……① という式が常に成り立つわ。

太郎：①から，$a_n = \boxed{\text{イ}}\, n - \boxed{\text{ウエ}}$ ……② となるね。

花子：これで，答えが求まったわね。

太郎：ちょっと待って。②は $n \geqq 2$ のときだけ成り立つから，$n = 1$ のときは別に考える必要があるよ。

花子：そうね。S_n の式から考えてみるわ。一般に，$\boxed{\text{オ}}$ が成り立つから，

$a_1 = \boxed{\text{カキク}}$ だわ。

太郎：$n = 1$ を②に代入すると，花子さんが求めた a_1 の値と一致しないね。

花子：ということは，答えは，$a_1 = \boxed{\text{カキク}}$，$n \geqq 2$ のとき $a_n = \boxed{\text{イ}}\, n - \boxed{\text{ウエ}}$ となるわね。

(1) $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ S_1　① S_2　② S_3　③ S_{n-1}　④ S_n　⑤ S_{n+1}

また，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウエ}}$ に当てはまる数を答えよ。

(2) $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ $a_1 = S_2 - S_1$　① $a_1 = S_3 - S_2$　② $a_1 = S_1$　③ $a_1 = S_2$

また，$\boxed{\text{カキク}}$ に当てはまる数を答えよ。

(3) $a_n > 0$ となる自然数 n の値の範囲は $n \geqq \boxed{\text{ケコ}}$ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{30} |a_k| - S_{30} = \boxed{\text{サシス}}$ である。

$\boxed{4}$ [最新版数標準プラン100 センター本試(改作)]

第2項が6，初項から第3項までの和が26である等比数列で，公比が1より大きいものを$\{a_n\}$とし，数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとする。

(1) 数列$\{a_n\}$の初項は$\boxed{\text{ア}}$，公比は$\boxed{\text{イ}}$であり，$S_n=\boxed{\text{ウ}}^n-\boxed{\text{エ}}$である。

(2) 数列$\{b_n\}$を次のように定義する。

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k \\ &= na_1+(n-1)a_2+\cdots\cdots+2a_{n-1}+a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{aligned}$$

たとえば，$b_1=a_1$，$b_2=2a_1+a_2$，$b_3=3a_1+2a_2+a_3$である。

数列$\{b_n\}$の一般項を求めよう。数列$\{b_n\}$の階差数列を$\{c_n\}$とする。

$c_n=b_{n+1}-b_n$であるから，$c_n=\boxed{\text{オ}}$を満たす。

$\boxed{\text{オ}}$に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ S_n　① $-S_n$　② S_{n+1}　③ $-S_{n+1}$

したがって，数列$\{b_n\}$の一般項は$b_n=\dfrac{1}{\boxed{\text{カ}}}\cdot\boxed{\text{ウ}}^{n+\boxed{\text{キ}}}-n-\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$である。

$\boxed{5}$ [最新版数標準プラン100 センター本試(改作)]

真分数を分母の小さい順に，分母が同じ場合には分子の小さい順に並べてできる数列

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，…… を $\{a_n\}$ とする。ただし，真分数とは，分子と分母がともに自然数で，分子が分母より小さい分数のことであり，上の数列では，約分できる形の分数も約分せずに並べている。

k を 2 以上の自然数とする。数列 $\{a_n\}$ において，分母が k である項の個数は $(k-1)$ 個であるから，初項から $\frac{k-1}{k}$ までの項の個数は $\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}(k^2-k)$ 個である。

よって，$a_{54}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ である。また，分母が k である項の和は $\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}(k-1)$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の初項から $\frac{k-1}{k}$ までの和は $\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}(k^2-k)$ である。

よって，$\sum_{n=1}^{54} a_n=\frac{\boxed{コサシ}}{\boxed{スセ}}$ である。

$\boxed{6}$ [最新版数標準プラン100 センター本試(改作)]

(1) 数列 $\{a_n\}$ は初項が -36 で，漸化式 $a_{n+1}=4a_n+120$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす。

漸化式は $a_{n+1}+\boxed{\text{アイ}}=4\left(a_n+\boxed{\text{アイ}}\right)$ と変形できるから，$a_n=\boxed{\text{ウ}}^{\,n}-\boxed{\text{エオ}}$ であり，$a_n>1000$ となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ は初項が 3 で，漸化式 $b_{n+1}-b_n=2n+3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす。

数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=n^{\boxed{\text{キ}}}+\boxed{\text{ク}}\,n$ である。

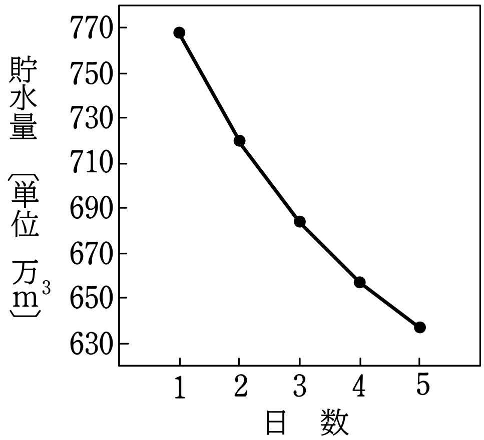
また，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=b_n-n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定めると，

$\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+\boxed{\text{ケ}}}$ であるから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{c_k}=\frac{\boxed{\text{コサシ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ である。

$\boxed{7}$

次の文章を読んで，(1) ～ (3) の問いに答えよ。

下のグラフと表は，8 月のある 2 週間にわたって，ある貯水池の貯水量を毎日同じ時刻に量り，その変化の様子を表したものの一部である。



日	1 日目	2 日目	3 日目	4 日目
貯水量 (万 m^3)	768	720	684	657

また，この貯水池では，計量を行った 2 週間の期間，2 日目以降の毎日において，貯水量は前日の貯水量の s % が減少し，さらに，一定量 t (万 m^3) 増加しているという。ただし，s，t は定数とする。

n は自然数とする。n 日目の貯水量を a_n (万 m^3) とし，数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1)　s，t の値を求めると

$$s = \boxed{アイ},\ t = \boxed{ウエオ}$$

となる。したがって，数列 $\{a_n\}$ の初項と漸化式は

$$a_1 = 768,\ a_{n+1} = \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}} a_n + \boxed{クケコ}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 13)$$

となる。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めてみよう。

【考え方 1】

数列 $\{a_n-d\}$ が等比数列となるような定数 d を求める。$d=\boxed{\text{サシス}}$ に対して，

数列 $\{a_n-d\}$ は公比 $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ の等比数列になることを用いる。

【考え方 2】

階差数列をとって考える。数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ が公比 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ の等比数列になること

を用いる。

いずれの考え方を用いても，一般項を求めることができて

$$a_n=\boxed{\text{ツテト}}\left(\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\right)^{n-1}+\boxed{\text{ヌネノ}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 14)$$

である。

(3) この貯水池の貯水量が 621 (万 m^3) を下回るのは，$\boxed{\text{ハ}}$ 日目以降である。

$\boxed{8}$ [最新版数標準プラン100 センター本試(改作)]

次の問題に関する先生と太郎さんの会話を読んで，(1)〜(4) の問いに答えよ。

問題 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+8n+2$ ($n=1$，2，3，……)

(1)

先生：数列の初項と漸化式からその一般項を求める問題です。まずは，漸化式に $n=1$，2 を代入して，具体的に数列の項をいくつか求めてみましょう。 太郎：$n=1$，2 を代入してみると，$a_2=\boxed{\text{アイ}}$，$a_3=\boxed{\text{ウエ}}$ となります。 先生：そうですね。それでは，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を，$b_n=a_{n+1}-a_n$ ($n=1$，2，3，……) と定めて，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を考えてみましょう。

(i) $\boxed{\text{アイ}}$，$\boxed{\text{ウエ}}$ に当てはまる数を求めよ。

(ii) b_1 の値を求めよ。

$b_1=\boxed{\text{オカ}}$

(iii) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

$b_{n+1}=\boxed{\text{キ}}b_n+\boxed{\text{ク}}$

(iv) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$b_n=\boxed{\text{ケコ}}\cdot\boxed{\text{サ}}^{n-1}-\boxed{\text{シ}}$

(2)　二人は，$\boxed{\text{問題}}$について引き続き会話をしている。

先生：漸化式で定められた数列の一般項の求め方を他にも考えてみましょう。
漸化式 $a_{n+1}=3a_n+8n+2$ を変形して，ある数列が等比数列になるように表すとどうなりますか。

太郎：定数 s，t を用いて $\boxed{\text{ス}}=3\left(\boxed{\text{セ}}\right)$ の式に変形してみました。$c_n=\boxed{\text{セ}}$ とおくと，$c_{n+1}=3c_n$ となるから，数列 $\{c_n\}$ は公比 3 の等比数列であることがわかります。

(i)　$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまる式を，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　a_n+sn+t　　①　$a_{n+1}+sn+t$　　②　$a_n+s(n+1)+t$

③　$a_{n+1}+s(n+1)+t$

(ii)　s，t の値を求めよ。

$s=\boxed{\text{ソ}}$，$t=\boxed{\text{タ}}$

(3)　数列 $\{a_n\}$ は，(1) の方法でも (2) の方法でも一般項を求めることができる。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_n=\boxed{\text{チ}}\cdot\boxed{\text{ツ}}^{n-1}-\boxed{\text{テ}}n-\boxed{\text{ト}}$

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{ナ}} \cdot \boxed{\text{ニ}}^{n} - \boxed{\text{ヌ}}\, n^2 - \boxed{\text{ネ}}\, n - \boxed{\text{ノ}}$$