数列　入試の基本

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$

(解説)

(1)　$a_n=3+(n-1)\cdot 2=2n+1$

$$S_n=\frac{n}{2}\{3+(2n+1)\}=\frac{n}{2}(2n+4)=n^2+2n$$

(2)　$b_n=4\cdot 3^{n-1}$

等比数列 $\{b_n\}$ の公比は $3\ (\neq 1)$ であるから　$S_n=\dfrac{4(3^n-1)}{3-1}=2(3^n-1)$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(10+1)=\frac{10\cdot 11}{2}=55$

$$\sum_{k=1}^{10} k^2=\frac{1}{6}\cdot 10\cdot(10+1)\cdot(2\cdot 10+1)=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=385$$

$$\sum_{k=1}^{5} k^3=\left\{\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(5+1)\right\}^2=\left(\frac{5\cdot 6}{2}\right)^2=225$$

$$\sum_{k=0}^{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\sum_{k=1}^{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=1-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{32}\right)\right\}$$

$$=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{33}{32}=\frac{21}{32}$$

別解　$\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ の求め方

$\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ は，初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列の初項から第 6 項までの和であるから

$$\sum_{k=0}^{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{64}\right)=\frac{21}{32}$$

$\boxed{2}$ [最新版数標準プラン100 センター本試(改作)]

(解説)

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると　$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_6=85$ から　$a_1+5d=85$

$a_{12}=67$ から　$a_1+11d=67$

よって　$a_1=100$，$d=-3$　　ゆえに，公差は -3 である。

したがって　$a_n=100+(n-1)\cdot(-3)=-3n+103$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$a_n=10$ のとき　$10=-3n+103$　　よって　$n=31$

また　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{100+(-3n+103)\}=\dfrac{1}{2}n(-3n+203)$

$$=\frac{-3}{2}n^2+\frac{203}{2}n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$S_n<0$ とすると　$-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{203}{2}n<0$　　よって　$\dfrac{n}{2}(-3n+203)<0$

$n>0$ から　$-3n+203<0$　　ゆえに　$n>\dfrac{203}{3}=67.6\cdots\cdots$

したがって，S_n が負となる最小の n は　$n=68$

$a_n>0$ とすると　$-3n+103>0$　　よって　$n<\dfrac{103}{3}=34.3\cdots\cdots$

ゆえに，a_1 から a_{34} までは正の数，a_{35} からは負の数となるから，S_n は $n=34$ のとき最大となる。

別解　$S_n=-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{203}{2}n=-\dfrac{3}{2}\left(n-\dfrac{203}{6}\right)^2+\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{203}{6}\right)^2$

$\dfrac{203}{6}=33.8\cdots\cdots$ は 33 よりも 34 に近いから，S_n は $n=34$ のとき最大となる。

3 [最新版数標準プラン100 センター本試(改作)]

解説

(1)　$n\geqq 2$ のとき　$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n=S_{n-1}+a_n$　(③)

よって　$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-22n+3-\{(n-1)^2-22(n-1)+3\}=2n-23$　……②

(2)　一般に，$a_1=S_1$ (②) が成り立つから　$a_1=S_1=1^2-22\cdot 1+3=-18$

$n=1$ を②に代入すると，$a_1=2\cdot 1-23=-21$ となり，a_1 の値は一致しない。

よって，正しい答えは次のようになる。　$a_1=-18$，$n\geqq 2$ のとき $a_n=2n-23$

(3)　$n\geqq 2$ のとき，$a_n>0$ とすると　$2n-23>0$　　よって　$n>\dfrac{23}{2}=11.5$

n は自然数であるから　$n\geqq 12$　　また　$a_1=-18<0$

ゆえに，$n\geqq 12$ のとき　$a_n>0$

また，$1\leqq n\leqq 11$ のとき　$a_n<0$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{30}|a_k|-S_{30}=\sum_{k=1}^{11}(-a_k)+\sum_{k=12}^{30}a_k-\left(\sum_{k=1}^{11}a_k+\sum_{k=12}^{30}a_k\right)$

$$=-2\sum_{k=1}^{11}a_k=-2S_{11}=-2(11^2-22\cdot 11+3)=236$$

4 [最新版数標準プラン100 センター本試(改作)]

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とすると　$a_n=ar^{n-1}$

$a_2=6$ から　$ar=6$　……①

また，初項から第 3 項までの和が 26 であるから　$a+ar+ar^2=26$

ゆえに　$a(1+r+r^2)=26$

両辺に r を掛けると　$ar(1+r+r^2)=26r$　　① を代入して　$6(1+r+r^2)=26r$

整理すると　$3r^2-10r+3=0$　すなわち　$(r-3)(3r-1)=0$

$r>1$ であるから　$r=3$

① から　$a\cdot 3=6$　　よって　$a=2$

よって，数列 $\{a_n\}$ の初項は 2，公比は 3 である。

初項から第 n 項までの和 S_n は　$S_n=\dfrac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$

(2)　$c_n=b_{n+1}-b_n=(n+1)a_1+na_2+\cdots\cdots+2a_n+a_{n+1}-\{na_1+(n-1)a_2+\cdots\cdots+a_n\}$

$=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+a_{n+1}=S_{n+1}$

よって　$c_n=S_{n+1}$　(②)　　ゆえに，(1) から　$c_n=3^{n+1}-1$

また　　$b_1=a_1=2$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(3^{k+1}-1)=2+\frac{9(3^{n-1}-1)}{3-1}-(n-1)=\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1}-n-\frac{3}{2}$$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{n+1}-n-\dfrac{3}{2}$

5 [最新版数標準プラン100 センター本試(改作)]

解説

k が 2 以上の自然数のとき，分母が k である項は $\dfrac{1}{k}$，$\dfrac{2}{k}$，……，$\dfrac{k-1}{k}$ であり，その個数は $(k-1)$ 個である。

よって，初項から $\dfrac{k-1}{k}$ までの項の個数は

$$1+2+\cdots\cdots+(k-1)=\frac{1}{2}(k-1)k=\frac{1}{2}(k^2-k)\ (\text{個})$$

$k=11$ のとき，$\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 11=55$ であるから　$a_{55}=\dfrac{11-1}{11}=\dfrac{10}{11}$　　よって　$a_{54}=\dfrac{9}{11}$

また，分母が k である項の和は

$$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\cdots\cdots+\frac{k-1}{k}=\frac{1}{k}\{1+2+\cdots\cdots+(k-1)\}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}(k-1)k=\frac{1}{2}(k-1)$$

よって，数列 $\{a_n\}$ の初項から $\dfrac{k-1}{k}$ までの和を S_k とすると

$$S_k=\sum_{l=2}^{k}\frac{1}{2}(l-1)=\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{k}(l-1)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1}l=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(k-1)k=\frac{1}{4}(k^2-k)$$

$a_{54}=\dfrac{9}{11}$，$a_{55}=\dfrac{10}{11}$ であるから　$\displaystyle\sum_{n=1}^{54}a_n=S_{11}-\frac{10}{11}=\frac{1}{4}\cdot 10\cdot 11-\frac{10}{11}=\frac{585}{22}$

$\boxed{6}$ [最新版数標準プラン100 センター本試(改作)]

解説

(1) $\alpha=4\alpha+120$ を解くと　$\alpha=-40$

よって，漸化式から　$a_{n+1}+40=4(a_n+40)$

ゆえに，数列 $\{a_n+40\}$ は初項 $a_1+40=-36+40=4$，公比 4 の等比数列である。

よって　$a_n+40=4\cdot 4^{n-1}$　　ゆえに　$a_n=4^n-40$

$a_n>1000$ から　$4^n-40>1000$　　よって　$2^{2n}>1040$

ここで　$2^{2\cdot 5}=1024<1040$，$2^{2\cdot 6}=4096>1040$

ゆえに，$a_n>1000$ となる最小の自然数 n は　6

(2) $b_{n+1}-b_n=2n+3$ から，数列 $\{b_n\}$ の階差数列の一般項は $2n+3$ である。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)=3+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+3(n-1)=n^2+2n$$

初項は 3 であるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$b_n=n^2+2n$　　よって　$c_n=b_n-n=(n^2+2n)-n=n^2+n$

ゆえに　$\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{c_k}=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{100}}-\frac{1}{101}\right)$

$$=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$$

$\boxed{7}$

解説

(1) 貯水量は，前日の s % 減少し，t (万 m^3) 増加する。

よって，1 日目の貯水量と 2 日目の貯水量から　$768\left(1-\dfrac{s}{100}\right)+t=720$　…… ①

2 日目の貯水量と 3 日目の貯水量から　$720\left(1-\dfrac{s}{100}\right)+t=684$　…… ②

① − ② から　$(768-720)\left(1-\dfrac{s}{100}\right)=36$　　よって　$1-\dfrac{s}{100}=\dfrac{3}{4}$

ゆえに　$s=25$，$t=144$

n 日目と $(n+1)$ 日目に関しても，同様に考える。

$1-\dfrac{25}{100}=\dfrac{3}{4}$ から　$a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+144$　…… ③

参考　s，t を用いて，3 日目の貯水量から，4 日目の貯水量を求めると

$$684\left(1-\frac{25}{100}\right)+144=657 \text{ (万 m}^3\text{)}$$

となり，4 日目の貯水量と一致する。

(2)　【考え方 1】

$d=\dfrac{3}{4}d+144$ を解いて　$d=576$　　③ を変形すると　$a_{n+1}-576=\dfrac{3}{4}(a_n-576)$

よって，数列 $\{a_n-576\}$ は公比 $\dfrac{3}{4}$ の等比数列になる。

ゆえに　$a_n-576=(a_1-576)\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$　　よって　$a_n=192\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}+576$

【考え方 2】

③ から　$a_{n+2}=\dfrac{3}{4}a_{n+1}+144$　…… ④

④－③ から　$a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{3}{4}(a_{n+1}-a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は，公比 $\dfrac{3}{4}$ の等比数列である。

ゆえに　$a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}=-48\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-48\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}\right\}=768-\dfrac{48\left\{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1-\dfrac{3}{4}}=192\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}+576$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=192\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}+576$

(3)　$192\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}+576<621$ とすると　$\dfrac{64}{15}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}<1$

$\dfrac{64}{15}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{5}=\dfrac{81}{80}>1$，$\dfrac{64}{15}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{6}=\dfrac{243}{320}<1$ であるから　$n-1\geqq 6$　すなわち　$n\geqq 7$

貯水量が 621 (万 m^3) を下回るのは，7 日目以降である。

8 [最新版数標準プラン100 センター本試(改作)]

解説

(1)　(i)　$a_2=3a_1+8\cdot 1+2=13$　　$a_3=3a_2+8\cdot 2+2=57$

(ii)　$b_1=a_2-a_1=13-1=12$

(iii)　$a_{n+1}=3a_n+8n+2$　…… ①

$a_{n+2}=3a_{n+1}+8(n+1)+2$　…… ②

②－① から　$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+8$　　よって　$b_{n+1}=3b_n+8$　…… ③

(iv)　$\alpha=3\alpha+8$ を解くと　$\alpha=-4$

よって，③ を変形すると　$b_{n+1}+4=3(b_n+4)$

ゆえに，数列 $\{b_n+4\}$ は，初項 $b_1+4=12+4=16$，公比 3 の等比数列である。

よって　$b_n+4=16\cdot 3^{n-1}$　　ゆえに　$b_n=16\cdot 3^{n-1}-4$

(2)　(i)　$a_{n+1}=3a_n+8n+2$ を

$$a_{n+1}+s(n+1)+t=3(a_n+sn+t)$$

と変形することを考える。

このとき，$c_n=a_n+sn+t$ とおくと，$c_{n+1}=3c_n$ となり，数列 $\{c_n\}$ が公比 3 の等比数列とわかる。

よって　ス ③，セ ⓪

(ii)　$a_{n+1}+s(n+1)+t=3(a_n+sn+t)$ から　$a_{n+1}=3a_n+2sn-s+2t$

これと，$a_{n+1}=3a_n+8n+2$ の右辺の係数を比較して　　$2s=8$，$-s+2t=2$

これを解いて　$s=4$，$t=3$

(3)　(解法 1)　(1) の結果を利用する。

数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項が $b_n=16\cdot 3^{n-1}-4$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(16\cdot 3^{k-1}-4)=1+16\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}-4(n-1)$$

$$=8\cdot 3^{n-1}-4n-3$$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=8\cdot 3^{n-1}-4n-3$

(解法 2)　(2) の結果を利用する。

$s=4$，$t=3$ から　$c_n=a_n+4n+3$　　よって　$c_1=a_1+4\cdot 1+3=1+7=8$

ゆえに，数列 $\{c_n\}$ は，初項 8，公比 3 の等比数列であるから　$c_n=8\cdot 3^{n-1}$

すなわち　$a_n+4n+3=8\cdot 3^{n-1}$　　したがって　$a_n=8\cdot 3^{n-1}-4n-3$

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(8\cdot 3^{k-1}-4k-3)=8\cdot\frac{3^n-1}{3-1}-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n=4\cdot 3^n-2n^2-5n-4$