数学Ⅲ　複素数平面　チャレンジ　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$［リンクⅢ 津田塾大］

複素数 z_1，z_2 が $|z_1|=|z_2|=|z_1+z_2|=1$ を満たすとき，$|z_1-z_2|$ を求めよ。

$\boxed{2}$［リンクⅢ 東北学院大］

複素数 z が $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ を満たすとき，$z^{15}+\dfrac{1}{z^{15}}$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$［リンクⅢ 愛媛大］

複素数平面において，3 点 A$(1+2i)$，B$(3+4i)$，C(z) が正三角形の頂点となる複素数 z をすべて求めよ。

$\boxed{4}$

方程式 $|z-1|=2|z-i|$ を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

$\boxed{5}$［リンクⅢ 津田塾大］

複素数平面上の点 z，w が $w=\dfrac{z}{z-\alpha}$ を満たす。ただし，複素数 α は $|\alpha|=1$ を満たす定数である。点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

$\boxed{6}$

複素数平面上の異なる 3 点 O(0)，A(α)，B(β) について，等式 $\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2=0$ が成り立つとき，△OAB はどのような三角形か。

$\boxed{7}$［リンクⅢ 東北学院大］

複素数 α，β が $|\alpha|=|\beta|=|\alpha-\beta|=2$ を満たしているとき，$|\alpha+\beta|$ を求めよ。

$\boxed{8}$［リンクⅢ 藤田保健衛生大］

複素数 z が $z+\dfrac{4}{z}=2$ を満たしているとき，$z^{11}+\left(\dfrac{4}{z}\right)^{11}=\boxed{}$ である。

$\boxed{9}$［リンクⅢ 関西大］

複素数平面において 2 点 A$(1+i)$，B$(5+3i)$ をとる。三角形 ABC が正三角形となる点 C に対応する複素数で虚部が最大のものを求めよ。

$\boxed{10}$［リンクⅢ 神奈川大］

方程式 $|z+3-3i|=2|z-3i|$ を満たす複素数 z 全体が描く円の中心と半径を求めよ。

$\boxed{11}$［リンクⅢ 名古屋市立大］

2 つの複素数 z と w との間に，$w=\dfrac{z+i}{z+1}$ なる関係がある。ただし，$z+1\neq 0$ とする。

(1)　z が複素数平面上の虚軸を動くとき，w の軌跡を求め，図示せよ。

(2)　z が複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，w の軌跡を求め，図示せよ。

$\boxed{12}$［リンクⅢ 岐阜大］

α，β は，等式 $3\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2=0$ を満たす 0 でない複素数とする。複素数平面上で複素数 0，α，β を表す点をそれぞれ O，A，B とするとき，$\angle$AOB および $\angle$OAB を求めよ。

$\boxed{13}$［リンクⅢ 東京電機大］

複素数 $(1+i)\left(\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$ の絶対値 r および偏角 θ を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$\boxed{14}$［リンクⅢ 防衛医科大学校］

$z^2+\dfrac{6}{z}$ が実数，$z\overline{z}=9$ をともに満たす複素数 z は全部で 4 つある。これらすべての実部の積はいくらか。

$\boxed{15}$［リンクⅢ 岐阜大］

複素数 α，β，γ が $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ および $\alpha+\beta+\gamma=0$ を満たすとき，$|\alpha-\beta|^2+|\alpha-\gamma|^2=6$ となることを示せ。

$\boxed{16}$ [リンクⅢ 東北学院大]

$z+\dfrac{1}{z}$ が実数でかつ，$|z-1|=1$ であるような複素数 z の値を求めよ。

$\boxed{17}$ [リンクⅢ 東京都市大]

i を虚数単位とする。$z=\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$ に対して，$z^{2017}-z$ を求めよ。

$\boxed{18}$ [リンクⅢ 大阪工業大]

$z=\left(\dfrac{1+i}{-\sqrt{3}+i}\right)^n$ が実数となるような最小の自然数 n を求めよ。また，そのときの z の値を求めよ。

$\boxed{19}$ [リンクⅢ 福島大]

$z^3=i$ を満たす z をすべて求め，複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{20}$ [リンクⅢ 龍谷大]

$z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とする。2つのさいころを投げて出た目の数の和を n とするとき，z^n が実数となる確率を求めよ。

$\boxed{21}$ [リンクⅢ 大阪市立大]

$z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおく。

(1) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を示せ。

(2) $w=z+\dfrac{1}{z}$ のとき，w^2+w の値を求めよ。

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ。

(4) 単位円に内接する正五角形の面積を求めよ。

$\boxed{22}$［リンクⅢ 藤田保健衛生大］

異なる 3 つの複素数 0，α，β の間に等式 $\alpha^2-3\alpha\beta+3\beta^2=0$ が成り立つとき，複素数平面上の原点 O(0)，点 A(α)，点 B(β) を頂点とする △OAB の ∠OBA を求めよ。

$\boxed{23}$［リンクⅢ 神戸大］

互いに異なる 3 つの複素数 α，β，γ の間に，等式

$$\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=8(\beta^3-3\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2-\gamma^3)$$

が成り立つとする。

(1) $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ を求めよ。

(2) 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) が同一直線上にないとき，それらを頂点とする三角形はどのような三角形か。

$\boxed{24}$［リンクⅢ 慶応義塾大］

複素数 z は等式 $\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right|=2$ を満たす。複素数平面上で，z を表す点を P($x+yi$) とする。点 P から，それぞれ点 A(2)，B(1) に引いた線分 PA と PB の長さの比を求めよ。また，点 P はどのような図形上にあるか。図形の方程式を求め，図示せよ。

$\boxed{25}$［リンクⅢ 上智大］

複素数 z は $|z|=1$ を満たすとする。$w=\dfrac{-z+2i}{2z+i}$ とおくとき，$|w|$ のとり得る値の最大値は ${}^{ア}\boxed{}$，最小値は $\dfrac{{}^{イ}\boxed{}}{{}^{ウ}\boxed{}}$ である。

$\boxed{26}$［リンクⅢ 北海道大］

次の漸化式で定義される複素数の数列 $z_1=1$,

$$z_{n+1}=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}z_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を考える。

(1)　z_2, z_3 を求めよ。

(2)　上の漸化式を $z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}(z_n-\alpha)$ と表したとき，複素数 α を求めよ。

(3)　一般項 z_n を求めよ。

(4)　$z_n=-\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ。