数学Ⅲ　複素数平面　チャレンジ　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$[リンクⅢ 津田塾大]

解説

$|z_1|=|z_2|=1$ から　$|z_1|^2=|z_2|^2=1$　　よって　$z_1\overline{z_1}=1$，$z_2\overline{z_2}=1$　……①

$|z_1+z_2|=1$ から　$|z_1+z_2|^2=1$　　すなわち　$(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=1$

よって　$(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=1$　　すなわち　$z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=1$

① から　$1+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+1=1$　　すなわち　$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=-1$

ゆえに　$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$

$=z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=1-(-1)+1=3$

したがって　$|z_1-z_2|=\sqrt{3}$

$\boxed{2}$[リンクⅢ 東北学院大]

解説

$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ の両辺に z を掛けて整理すると　$z^2-\sqrt{2}\,z+1=0$

これを解くと　$z=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}$

よって　$z=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)$ (複号同順)

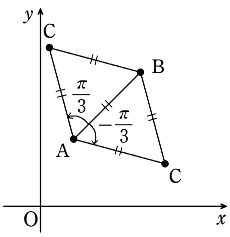
ここで，$\theta=\pm\dfrac{\pi}{4}$ とおくと

$$z^{15}+\frac{1}{z^{15}}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{15}+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-15}$$
$$=(\cos15\theta+i\sin15\theta)+\{\cos(-15\theta)+i\sin(-15\theta)\}$$
$$=2\cos15\theta=2\cos\left(\pm\frac{15}{4}\pi\right)=2\cos\frac{15}{4}\pi=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$\boxed{3}$[リンクⅢ 愛媛大]

解説

点 C は，点 A を中心として点 B を $\dfrac{\pi}{3}$ 回転，または $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点である。



回転角が $\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$$z=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\{(3+4i)-(1+2i)\}+(1+2i)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+2i)+1+2i=2-\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})i$$

回転角が $-\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$$z=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\{(3+4i)-(1+2i)\}+(1+2i)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+2i)+1+2i=2+\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})i$$

よって　$z=2-\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})i$，$2+\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})i$

$\boxed{4}$

解説

方程式の両辺を 2 乗すると　$|z-1|^2=2^2|z-i|^2$

よって　$(z-1)\overline{(z-1)}=4(z-i)\overline{(z-i)}$

すなわち　$(z-1)(\overline{z}-1)=4(z-i)(\overline{z}+i)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}+\dfrac{1+4i}{3}z+\dfrac{1-4i}{3}\overline{z}=-1$

式を変形すると　$\left(z+\dfrac{1-4i}{3}\right)\left(\overline{z}+\dfrac{1+4i}{3}\right)=\dfrac{8}{9}$

すなわち　$\left(z+\dfrac{1-4i}{3}\right)\overline{\left(z+\dfrac{1-4i}{3}\right)}=\dfrac{8}{9}$

ゆえに　$\left|z-\dfrac{-1+4i}{3}\right|^2=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$

したがって　$\left|z-\dfrac{-1+4i}{3}\right|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

これは，点 $\dfrac{-1+4i}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ の円である。

参考　この円は，2 点 1，i からの距離の比が 2：1 である点 z 全体，すなわち，2 点 1，i を 2：1 に内分する点と外分する点を直径の両端とする円である (アポロニウスの円)。

$\boxed{5}$[リンクⅢ 津田塾大]

解説

$w=\dfrac{z}{z-\alpha}$ から　$(z-\alpha)w=z$　　よって　$(w-1)z=\alpha w$

$w=1$ は等式を満たさないから，$w\neq1$ で　$z=\dfrac{\alpha w}{w-1}$

点 z は原点を中心とする半径 1 の円周上を動くから　$|z|=1$

すなわち　$\left|\dfrac{\alpha w}{w-1}\right|=1$　　ゆえに　$|\alpha||w|=|w-1|$

$|\alpha|=1$ であるから　$|w|=|w-1|$

よって，w の軌跡は 2 点 0，1 を結ぶ線分の垂直二等分線である。

$\boxed{6}$

解説

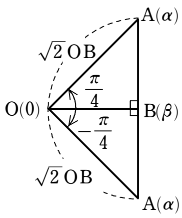
B は O と異なるから　$\beta\neq0$

$\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2=0$ の両辺を $\beta^2\,(\neq0)$ で割ると　$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+2=0$

これを $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について解くと　$\dfrac{\alpha}{\beta}=1\pm i$

よって　$\alpha=(1+i)\beta=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\beta$

または　$\alpha=(1-i)\beta=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}\beta$



したがって，点 A は，点 B を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ または $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍に拡大した点である。

よって，△OAB は辺 OA を斜辺とする直角二等辺三角形である。

$\boxed{7}$[リンクⅢ 東北学院大]

解説

$|\alpha|=|\beta|=2$ から　$|\alpha|^2=|\beta|^2=4$　　よって　$\alpha\overline{\alpha}=4$，$\beta\overline{\beta}=4$　……①

$|\alpha-\beta|=2$ から　$|\alpha-\beta|^2=4$　　すなわち　$(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}=4$

よって　$(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=4$　　すなわち　$\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=4$

① から　$4-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+4=4$　　すなわち　$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=4$

ゆえに　$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=\alpha\overline{\alpha}+(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)+\beta\overline{\beta}$

$=4+4+4=12$

したがって　$|\alpha+\beta|=2\sqrt{3}$

$\boxed{8}$[リンクⅢ 藤田保健衛生大]

解説

$z+\dfrac{4}{z}=2$ の両辺に z を掛けて整理すると　$z^2-2z+4=0$

これを解くと　$z=1\pm\sqrt{3}\,i$

よって　$z=2\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ (複号同順)

ここで，$\theta=\pm\dfrac{\pi}{3}$ とおくと

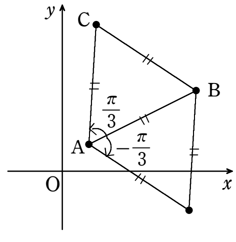
$$z^{11}+\left(\frac{4}{z}\right)^{11}=\{2(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{11}+4^{11}\{2(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{-11}$$
$$=2^{11}(\cos11\theta+i\sin11\theta)+4^{11}\cdot2^{-11}\{\cos(-11\theta)+i\sin(-11\theta)\}$$
$$=2^{11}(\cos11\theta+i\sin11\theta)+2^{11}(\cos11\theta-i\sin11\theta)$$
$$=2^{11}\cdot2\cos11\theta=2^{12}\cos\left(\pm\frac{11}{3}\pi\right)=2^{12}\cos\frac{11}{3}\pi=2^{12}\times\frac{1}{2}=2048$$

$\boxed{9}$[リンクⅢ 関西大]

解説

点 C として考えられるのは，点 A を中心として点 B を $\dfrac{\pi}{3}$ 回転，または $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点である。

右の図から，対応する複素数の虚部が最大となるのは，$\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点である。



よって，求める複素数は

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\{(5+3i)-(1+i)\}+(1+i)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4+2i)+1+i=3-\sqrt{3}+(2+2\sqrt{3})i$$

$\boxed{10}$ [リンクⅢ 神奈川大]

解説

方程式の両辺を 2 乗すると　$|z+3-3i|^2=2^2|z-3i|^2$

よって　$(z+3-3i)\overline{(z+3-3i)}=4(z-3i)\overline{(z-3i)}$

すなわち　$(z+3-3i)(\overline{z}+3+3i)=4(z-3i)(\overline{z}+3i)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}-(1-3i)z-(1+3i)\overline{z}=-6$

式を変形すると　$\{z-(1+3i)\}\{\overline{z}-(1-3i)\}=4$

すなわち　$\{z-(1+3i)\}\overline{\{z-(1+3i)\}}=4$　　ゆえに　$|z-(1+3i)|^2=2^2$

したがって　$|z-(1+3i)|=2$

これは，点 $1+3i$ を中心とする半径 2 の円である。

参考　この円は，2 点 $-3+3i$，$3i$ からの距離の比が 2：1 である点 z 全体，すなわち，2 点 $-3+3i$，$3i$ を 2：1 に内分する点と外分する点を直径の両端とする円である (アポロニウスの円)。

$\boxed{11}$ [リンクⅢ 名古屋市立大]

解説

$w=\dfrac{z+i}{z+1}$ から　$(z+1)w=z+i$　　よって　$(w-1)z=-w+i$

$w=1$ は等式を満たさないから，$w\neq1$ で　$z=\dfrac{-w+i}{w-1}$

(1)　z が虚軸上にあるから　$z+\overline{z}=0$　　すなわち　$\dfrac{-w+i}{w-1}+\overline{\left(\dfrac{-w+i}{w-1}\right)}=0$

ゆえに　$\dfrac{-w+i}{w-1}+\dfrac{-\overline{w}-i}{\overline{w}-1}=0$

よって　$(\overline{w}-1)(-w+i)+(w-1)(-\overline{w}-i)=0$

整理すると　$w\overline{w}-\dfrac{1-i}{2}w-\dfrac{1+i}{2}\overline{w}=0$

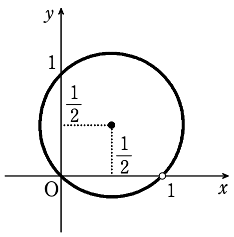
ゆえに　$\left(w-\dfrac{1+i}{2}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{1-i}{2}\right)=\dfrac{(1+i)(1-i)}{4}$

すなわち　$\left(w-\dfrac{1+i}{2}\right)\overline{\left(w-\dfrac{1+i}{2}\right)}=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\left|w-\dfrac{1+i}{2}\right|^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

ゆえに　$\left|w-\dfrac{1+i}{2}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$w\neq1$

したがって，点 w の軌跡は点 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の円である。

ただし，点 1 を除く。[図]

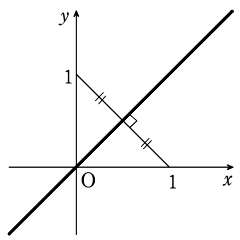


(2)　点 z は原点を中心とする半径 1 の円周上を動くから

$|z|=1$　　すなわち　$\left|\dfrac{-w+i}{w-1}\right|=1$

ゆえに　$|w-i|=|w-1|$

よって，w の軌跡は 2 点 1，i を結ぶ線分の垂直二等分線である。[図]



$\boxed{12}$ [リンクⅢ 岐阜大]

解説

$\beta\neq0$ であるから，$3\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2=0$ の両辺を β^2 で割ると　$3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-6\cdot\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+4=0$

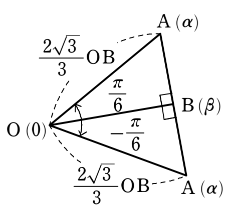
これを $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について解くと　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{3\pm\sqrt{3^2-3\cdot4}}{3}=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

よって　$\alpha=\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)\beta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\beta$

または　$\alpha=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)\beta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}\beta$

したがって，点 A は，点 B を原点を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ または $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転し，原点からの距離を $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 倍に拡大した点である。

ゆえに，∠AOB の大きさは　$\dfrac{\pi}{6}$



よって，△OAB は辺 OA を斜辺とし，∠AOB$=\dfrac{\pi}{6}$ である直角三角形であるから，∠OAB の大きさは　$\dfrac{\pi}{3}$

$\boxed{13}$ [リンクⅢ 東京電機大]

解説

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{7}\right)\right\}$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{28}\pi+i\sin\frac{11}{28}\pi\right)$$

よって　$r=\sqrt{2}$，$\theta=\dfrac{11}{28}\pi$

$\boxed{14}$ [リンクⅢ 防衛医科大学校]

解説

$z^2+\dfrac{6}{z}$ が実数であるから　$z^2+\dfrac{6}{z}=\overline{z^2+\dfrac{6}{z}}$

すなわち　$z^2+\dfrac{6}{z}=\overline{z}^2+\dfrac{6}{\overline{z}}$　……①

また，$z\overline{z}=9$ であるから　$z\neq0$

よって　$\overline{z}=\dfrac{9}{z}$

これを ① に代入すると　$z^2+\dfrac{6}{z}=\left(\dfrac{9}{z}\right)^2+\dfrac{2z}{3}$

整理すると　$3z^4-2z^3+18z-243=0$

すなわち　$(z-3)(z+3)(3z^2-2z+27)=0$

よって　$z=3,\ -3,\ \dfrac{1\pm4\sqrt{5}i}{3}$

これらすべての実部の積は　$3\times(-3)\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=-1$

$\boxed{15}$ [リンクⅢ 岐阜大]

解説

$\alpha+\beta+\gamma=0$ から　$\gamma=-\alpha-\beta$

よって　$|\gamma|^2=|-\alpha-\beta|^2=(-\alpha-\beta)\overline{(-\alpha-\beta)}=(-\alpha-\beta)(-\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$　……①

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ より $|\alpha|^2=|\beta|^2=|\gamma|^2=1$ であるから　$\alpha\overline{\alpha}=1$，$\beta\overline{\beta}=1$，$|\gamma|^2=1$

これを ① に代入すると　$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=-1$

したがって　$|\alpha-\beta|^2+|\alpha-\gamma|^2=|\alpha-\beta|^2+|\alpha-(-\alpha-\beta)|^2=|\alpha-\beta|^2+|2\alpha+\beta|^2$

$=(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}+(2\alpha+\beta)\overline{(2\alpha+\beta)}$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})+(2\alpha+\beta)(2\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=5\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+2\beta\overline{\beta}$

$=6$

$\boxed{16}$ [リンクⅢ 東北学院大]

解説

$z+\dfrac{1}{z}$ は実数であるから　$z+\dfrac{1}{z}=\overline{z+\dfrac{1}{z}}$　$(z\neq0)$

すなわち　$z+\dfrac{1}{z}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$

両辺に $z\overline{z}$ を掛けると　$z^2\overline{z}+\overline{z}=z\overline{z}^2+z$

整理すると　$z\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0$

ゆえに　$(z\overline{z}-1)(z-\overline{z})=0$

よって　$|z|^2=1$ または $z=\overline{z}$　……①

また，$|z-1|=1$ から　$|z-1|^2=1^2$

すなわち　$(z-1)(\overline{z}-1)=1$

展開すると　$z\overline{z}-z-\overline{z}+1=1$

よって　$|z|^2-(z+\overline{z})=0$　……②

① から，次の 2 つの場合を考える。

[1]　$|z|^2=1$ のとき

$z=x+yi$ (x, y は実数) とおくと，② から　$1-\{(x+yi)+(x-yi)\}=0$

ゆえに　$1-2x=0$　　よって　$x=\dfrac{1}{2}$

また，$|z|^2=1$ から　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

ゆえに　$y^2=\dfrac{3}{4}$　　よって　$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

　したがって　$z=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

[2]　$z=\overline{z}$ のとき

　z は実数であるから，② より　$z^2-2z=0$

　よって　$z(z-2)=0$

　$z\neq 0$ であるから　$z=2$

[1]，[2] から　$z=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ 2$

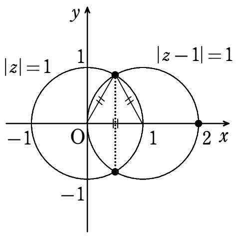
別解　（① までは本解と同様）

　① から，$|z|=1$ または z は実数 $(z\neq 0)$ であり，複素数平面上で，$|z|=1$ は原点 O を中心とする半径 1 の円を表す。

　また，$|z-1|=1$ は点 1 を中心とする半径 1 の円を表す。

　よって，右の図から

$$z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 2$$



17 [リンクⅢ　東京都市大]

解説

ド・モアブルの定理から　$z^{14}=\left(\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)^{14}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

よって　$z^{2017}-z=z^{14\cdot 144+1}-z=(z^{14})^{144}\cdot z-z=1^{144}\cdot z-z=0$

18 [リンクⅢ　大阪工業大]

解説

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，$-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$ であるから

$$\frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5}{6}\pi\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{7}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{12}\pi\right)\right\}$$

よって　$z=\left(\dfrac{1+i}{-\sqrt{3}+i}\right)^n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left\{\cos\left(-\dfrac{7}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{7}{12}\pi\right)\right\}^n$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left\{\cos\left(\frac{-7n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-7n\pi}{12}\right)\right\}$$

z が実数となるとき　$\sin\left(\dfrac{-7n\pi}{12}\right)=0$　　すなわち　$\dfrac{-7n\pi}{12}=k\pi$　（k は整数）

ゆえに　$n=\dfrac{-12k}{7}$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=12$

このとき　$z=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}\{\cos(-7\pi)+i\sin(-7\pi)\}=\dfrac{1}{2^6}\cdot(-1)=-\dfrac{1}{64}$

19 [リンクⅢ　福島大]

解説

方程式の解 z の極形式を　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　……①　とすると

$$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

また，i を極形式で表すと　$i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

よって　$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^3=1$，$3\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$　（k は整数）

$r>0$ であるから　$r=1$　……②

また　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}$

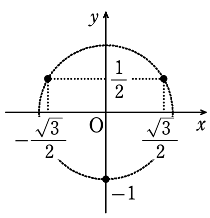
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると，$k=0，1，2$ であるから

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\quad\cdots\cdots③$$

②，③ を ① に代入すると，求める解は

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ -i$$

これらを表す点を図示すると，右の図のようになる。



20 [リンクⅢ　龍谷大]

解説

$z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるから，ド・モアブルの定理より

$$z^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$$

z^n が実数となるとき　$\sin\dfrac{n\pi}{3}=0$

よって，n は 3 の倍数となる。

2 つのさいころを投げて出た目を $(a,\ b)$ と表すと，n が 3 の倍数となるのは

(1，2)，(2，1)，(1，5)，(2，4)，(3，3)，(4，2)，
(5，1)，(3，6)，(4，5)，(5，4)，(6，3)，(6，6)

の 12 通り。

よって，求める確率は　$\dfrac{12}{6^2}=\dfrac{1}{3}$

21 [リンクⅢ　大阪市立大]

解説

(1)　ド・モアブルの定理から　$z^5=\left(\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

　よって，$z^5-1=0$ であるから　$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

　$z\neq 1$ から　$z^4+z^3+z^2+z+1=0$

(2)　$w^2=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=z^2+\dfrac{1}{z^2}+2$ であるから，(1) より

$$w^2+w=\left(z^2+\frac{1}{z^2}+2\right)+z+\frac{1}{z}=\frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2}+1=1$$

(3)　$|z|=1$ であるから　$|z|^2=1$

　よって　$z\overline{z}=1$　　すなわち　$\dfrac{1}{z}=\overline{z}=\cos\dfrac{2\pi}{5}-i\sin\dfrac{2\pi}{5}$

　ゆえに　$w=z+\dfrac{1}{z}=2\cos\dfrac{2\pi}{5}$

　(2) より，$w=2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ は方程式 $w^2+w-1=0$ の解である。

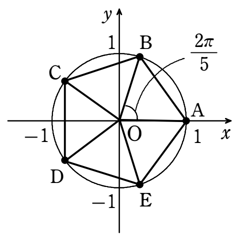
　方程式 $w^2+w-1=0$ を解くと　$w=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

　$0<\dfrac{2\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\dfrac{2\pi}{5}>0$ であるから　$2\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

　したがって　$\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(4)　右の図のように単位円に内接する正五角形 ABCDE を考える。

　5 つの三角形 △OAB，△OBC，△OCD，△ODE，△OEA は頂角が $\dfrac{2\pi}{5}$ の二等辺三角形で，これらはすべて合同である。



　$0<\dfrac{2\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，(3) より

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{2\pi}{5}}=\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}$$
$$=\sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

　したがって，求める正五角形の面積は　$5\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\sin\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$

22 [リンクⅢ　藤田保健衛生大]

解説

B は O と異なるから　$\beta\neq 0$

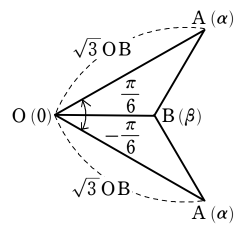
$\alpha^2-3\alpha\beta+3\beta^2=0$ の両辺を $\beta^2\,(\neq 0)$ で割ると　$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+3=0$

これを $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について解くと　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

よって　$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}\beta=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\beta$

　または　$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}\beta=\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}\beta$

したがって，点 A は，点 B を原点を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ または $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{3}$ 倍に拡大した点である。



よって　$\mathrm{OA}=\sqrt{3}\,\mathrm{OB}$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$

△OAB について余弦定理により

$$\mathrm{AB}^2=(\sqrt{3}\,\mathrm{OB})^2+\mathrm{OB}^2-2(\sqrt{3}\,\mathrm{OB})\mathrm{OB}\cos\frac{\pi}{6}=\mathrm{OB}^2$$

よって，AB＝OB であるから，△OAB は二等辺三角形である。

ゆえに　$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{OBA}=\pi-2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{3}\pi$

23 ［リンクⅢ 神戸大］

解説

(1) 等式を変形すると　$(\alpha-\beta)^3=-8(\gamma-\beta)^3$

$\beta\neq\gamma$ であるから　$\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right)^3=-8$

$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=z$ とおくと　$z^3=-8$　　すなわち　$z^3+8=0$

よって，$(z+2)(z^2-2z+4)=0$ から　$z=-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$

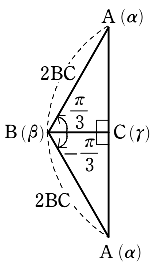
したがって　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$

(2) 3 点 A，B，C は同一直線上にないから，$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ は実数でない。

よって　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=1\pm\sqrt{3}\,i$

極形式で表すと

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=2\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\quad(\text{複号同順})$$



ゆえに，$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right|=2$ であるから　$|\alpha-\beta|=2|\gamma-\beta|$

すなわち，BA＝2BC であり　BA：BC＝2：1

また，$\arg\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=\pm\dfrac{\pi}{3}$ であるから　$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{3}$

したがって，△ABC は $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形である。

24 ［リンクⅢ 慶応義塾大］

解説

$\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right|=2$ から　$|z-2|=2|z-1|$

ゆえに　PA：PB＝2：1

$|z-2|=2|z-1|$ の両辺を 2 乗すると　$|z-2|^2=4|z-1|^2$

よって　$(z-2)\overline{(z-2)}=4(z-1)\overline{(z-1)}$

すなわち　$(z-2)(\overline{z}-2)=4(z-1)(\overline{z}-1)$

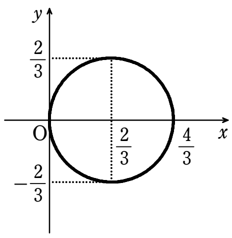
両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}-\dfrac{2}{3}z-\dfrac{2}{3}\overline{z}=0$

式を変形すると　$\left(z-\dfrac{2}{3}\right)\left(\overline{z}-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$

すなわち　$\left(z-\dfrac{2}{3}\right)\overline{\left(z-\dfrac{2}{3}\right)}=\dfrac{4}{9}$

ゆえに　$\left|z-\dfrac{2}{3}\right|^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

したがって　$\left|z-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{2}{3}$



これは，点 $\dfrac{2}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{2}{3}$ の円である。

別解　P は，線分 AB を 2：1 の比に内分する点 C，2：1 の比に外分する点 D を直径の両端とする円上にある。

$\mathrm{C}\left(\dfrac{4}{3}\right)$，D(0) であるから，この円の中心は $\dfrac{2}{3}$，半径は $\dfrac{2}{3}$ である。

よって，その方程式は　$\left|z-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{2}{3}$

25 ［リンクⅢ 上智大］

解説

$w=\dfrac{-z+2i}{2z+i}$ から　$(2z+i)w=-z+2i$

よって　$(2w+1)z=(2-w)i$

$w=-\dfrac{1}{2}$ は等式を満たさないから，$w\neq-\dfrac{1}{2}$ で　$z=\dfrac{(2-w)i}{2w+1}$

$|z|=1$ であるから　$\left|\dfrac{(2-w)i}{2w+1}\right|=1$　　ゆえに　$|2-w||i|=|2w+1|$

$|i|=1$ であるから　$|2-w|=|2w+1|$

両辺を 2 乗すると　$|2-w|^2=|2w+1|^2$

よって　$(2-w)\overline{(2-w)}=(2w+1)\overline{(2w+1)}$

すなわち　$(2-w)(2-\overline{w})=(2w+1)(2\overline{w}+1)$

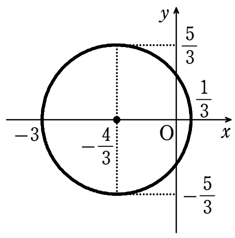
両辺を展開して整理すると　$w\overline{w}+\dfrac{4}{3}w+\dfrac{4}{3}\overline{w}=1$

式を変形すると　$\left(w+\dfrac{4}{3}\right)\left(\overline{w}+\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{25}{9}$

すなわち　$\left(w+\dfrac{4}{3}\right)\overline{\left(w+\dfrac{4}{3}\right)}=\dfrac{25}{9}$

ゆえに　$\left|w+\dfrac{4}{3}\right|^2=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2$

したがって　$\left|w+\dfrac{4}{3}\right|=\dfrac{5}{3}$



よって，w を表す点は，点 $-\dfrac{4}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{5}{3}$ の円周上を動く。

$|w|$ は w を表す点と原点の間の距離であるから，$|w|$ は

$w=-3$ のとき最大値 ${}^{\text{ア}}3$，$w=\dfrac{1}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{{}^{\text{イ}}1}{{}^{\text{ウ}}3}$

をとる。

26 ［リンクⅢ 北海道大］

解説

(1) $z_2=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}z_1+1=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}+1=\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2}$

$z_3=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}z_2+1=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2}+1=\dfrac{3+\sqrt{3}\,i+3\sqrt{3}\,i-3}{4}+1=1+\sqrt{3}\,i$

(2) $z_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}z_n+1$ …… ①，$z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}(z_n-\alpha)$ …… ② とする。

①－② から　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\alpha+1$

よって　$\alpha=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}\,i}=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

(3) (2) から　$z_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\left(z_n-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

よって　$z_n-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}\left(z_1-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに　$z_n=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

(4) $-\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とすると

$$\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}=-1\quad\cdots\cdots ③$$

$\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}=\cos\left\{-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\times(n-1)\right\}+i\sin\left\{-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\times(n-1)\right\}$$

また　$-1=\cos\pi+i\sin\pi$

よって，③ から　$-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\times(n-1)=\pi+2k\pi$　(k は整数)

すなわち　$n=6k+5$

したがって，求める自然数 n は　$n=6k+5$　(k は 0 以上の整数)