ベクトル　入試の基本

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=(4,\ 3)$，$\vec{a}-\vec{b}=(2,\ -1)$ のとき，$\vec{a}=\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$，

$\vec{b}=\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ であり，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさは $\boxed{\text{オ}}$ である。

(2)　$\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$，$\vec{c}=(12,\ -2)$ のとき，

$\vec{c}=\boxed{\text{カ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{キ}}\,\vec{b}$ であり，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{c}$ が平行となるとき $t=\boxed{\text{ク}}$ である。

また，$s\vec{a}-\vec{c}$ と $\vec{b}$ が垂直となるとき，$s=\boxed{\text{ケコ}}$ である。

(3)　座標空間上に 3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 2,\ 1)$，B$(-2,\ 2,\ 4)$ がある。

線分 AB を $2:1$ に内分する点を C，$2:1$ に外分する点を D とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\boxed{\text{サシ}},\ \boxed{\text{ス}},\ \boxed{\text{セ}}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\boxed{\text{ソタ}},\ \boxed{\text{チ}},\ \boxed{\text{ツ}}\right)$ である。

また，点 E$(x,\ 4,\ -2)$ が 3 点 O，A，B を含む平面上にあるとき，$x=\boxed{\text{テ}}$ である。

$\boxed{2}$

$\triangle$ABCにおいて，AB$=5$，BC$=6$，CA$=7$とする。

$\angle$Aの二等分線と辺BCとの交点をDとすると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$である。

また，$\angle$Bの二等分線と線分ADとの交点をIとすると，AI：ID$=\boxed{\text{キ}}$：1であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。

$\triangle$ABCの重心をGとすると，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$である。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{GI}}$と$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$は平行であり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{GI}}\right|=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

$\boxed{3}$ [改訂版数標準プラン100 センター本試(改作)]

△OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB を 3：4 に内分する点を D とする。また，直線 BC と直線 AD の交点を E とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表したい。次の **方針** 1 または **方針** 2 について，$\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまる数を求めよ。

方針 1

BE：EC $= t$：$(1-t)$，AE：ED $= s$：$(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表せる。$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いた表し方はただ 1 通りであることから，s，t の値を求める。

方針 2

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} x\overrightarrow{\mathrm{OC}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} y\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

と表せる。点 E は直線 BC かつ直線 AD 上の点であることから，x，y の値を求める。

方針 1 または **方針** 2 を用いると，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

(2) 座標平面上において，2 点 A (21，0)，D (0，15) を通る直線と 2 点 B (0，35)，C (14，0) を通る直線の交点 E の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}},\ \boxed{\text{チ}}\right)$ である。

$\boxed{4}$ [改訂版数標準プラン100 センター本試(改作)]

a を正の数とする。三角形 ABC の内部の点 P が $a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしているとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{a+\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{a+\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。

直線 AP と辺 BC との交点を D とすると $\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であり，点 P が線分 AD を 3：1 に内分するとき，$a=\boxed{\text{キ}}$ である。

さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2\sqrt{7}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=4$ であるとすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\text{クケ}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{5}$

三角錐 OABC について，$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ を満たす点 F を考える。また，辺 OB の中点を M，辺 OC を 3：1 に内分する点を N とし，直線 OF と平面 AMN の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{OF}=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}\left(\overrightarrow{OA}+\boxed{\text{イ}}\cdot\frac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3}\right)$ であるから，点 F は，辺 BC を $\boxed{\text{ウ}}$：1 に内分する点を D としたとき，線分 AD を $\boxed{\text{エ}}$：1 に内分する位置にある。

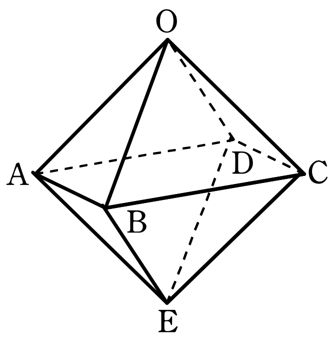
(2) 点 P は線分 OF 上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OF}$ $(0<k<1)$ と表される。

また，点 P は平面 AMN 上にあるから，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{AM}+m\overrightarrow{AN}$ と表される。

したがって，$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}\overrightarrow{OB}+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}\overrightarrow{OC}$ である。

$\boxed{6}$

1 辺の長さが 1 の正八面体 OABCDE を考える。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。



(1)　$\overrightarrow{OD}=\boxed{\text{ア}}$，$\overrightarrow{OE}=\boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群
（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$	①　$-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$	②　$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$
③　$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$	④　$\vec{a}+\vec{b}$	⑤　$\vec{a}+\vec{c}$
⑥　$\vec{b}+\vec{c}$	⑦　$-\vec{a}+\vec{b}$	

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{オ}}$ である。

(3)　△OAB，△BCE，△CDE，△OAD の重心をそれぞれ P，Q，R，S とすると，

$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{c}$，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}=\boxed{\text{ク}}$ である。

また，四角形 PQRS は長方形であるから，その面積は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

$\boxed{7}$

先生と太郎さんと花子さんは，点 O を原点とする座標空間の 4 点 A (3，0，0)，B (3，6，3)，C (0，6，0)，D (0，0，3) でできる図形について考えている。
3 人の会話を読んで，(1)，(2) の問いに答えよ。

先生：4 点 A，B，C，D のうちの 2 点を結んでできる線分の長さを調べ，4 点 A，B，C，D でできる図形について考えてみてください。

花子：AB＝$\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$，BC＝$\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ だわ。さらに，線分 CD，線分 AD の長さも求めると，向かい合う 2 組の辺の長さがそれぞれ等しいから，4 点 A，B，C，D でできる図形は平行四辺形 ABCD ね。

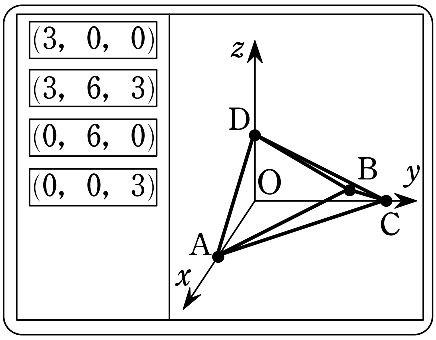
太郎：でも，線分 AC と線分 BD の中点の座標をそれぞれ求めると，
$\left(\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}\right)$，$\left(\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}},\ \boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シ}}\right)$ となって一致しないよ。

先生：よく気がつきましたね。ではコンピュータのソフトを用いて確認してみましょう。

太郎：4 点 A，B，C，D でできる図形は四面体だ！

花子：なるほど。座標空間では，4 点が同一平面上にあるかどうかも考えないといけないのね。

先生：その通りです。



(1) (i) $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまる数を求めよ。

(ii) 一般に，座標空間の異なる 4 点 P，Q，R，S について，条件「PQ＝RS かつ QR＝PS」は，4 点 P，Q，R，S でできる図形が平行四辺形 PQRS であるための $\boxed{\boxed{\text{ス}}}$。

$\boxed{\boxed{\text{ス}}}$ の解答群

⓪ 必要条件であるが十分条件ではない
① 十分条件であるが必要条件ではない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

(iii) 次の条件 a ～ d のうち，座標空間の異なる 4 点 P，Q，R，S でできる図形が平行四辺形 PQRS であることと同値な条件は $\boxed{\text{セ}}$ 。ただし，4 点 P，Q，R，S は同一直線上にないものとする。

条件 a：$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$　条件 b：$|\overrightarrow{PS}|=|\overrightarrow{QR}|$　条件 c：$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{QS}$　条件 d：$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}=0$

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ a だけである	① b だけである	② c だけである
③ d だけである	④ a と b だけである	⑤ b と c だけである
⑥ c と d だけである	⑦ a と b と c だけである	
⑧ b と c と d だけである	⑨ a と b と c と d すべてである	

(iv) 4 点 A，B，C，E でできる図形が，平行四辺形 ABCE となるとき，点 E の座標は $\left(\boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タ}},\ \boxed{\text{チツ}}\right)$ である。

(2)　点 B から 3 点 A，C，D を通る平面に垂線 BH を下ろす。点 H の座標を求めよう。

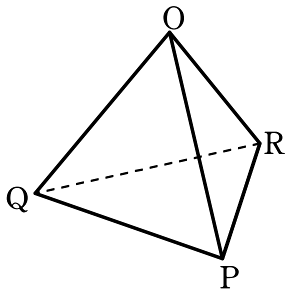
H$(p,\ q,\ r)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\boxed{\text{テ}}$ であるから，$p=r$，

$q=\dfrac{r+\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。また，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ より，$r=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ であるから，点 H の座

標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\right)$ である。

$\boxed{8}$

(1)　1辺の長さが2の正四面体OPQRを考える。辺OPの中点をMとし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$ とする。



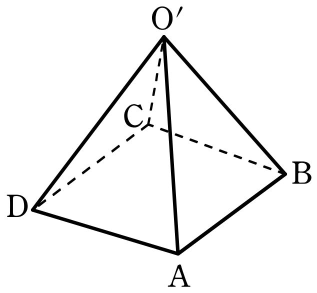
(i)　$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\vec{p}+\vec{r}$，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\vec{p}+\vec{q}$ であり，

$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{q}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{p}=\boxed{\text{エ}}$ である。

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\boxed{\text{オ}}$ であるから，$\angle\mathrm{RMQ}=\alpha$ とすると，

$\cos\alpha=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(2)　1辺の長さが2の正四角錐 O′－ABCD を考える。
ただし，正四角錐 O′－ABCD の辺の長さはすべて等しいものとする。辺 O′A の中点を N とし，$\overrightarrow{\mathrm{O'A}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{O'B}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{O'C}}=\vec{c}$ とする。



(i)　$\overrightarrow{\mathrm{NB}}=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{ND}}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ であり，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ス}}$ である。

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{NB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ND}}=\boxed{\text{セソ}}$ であるから，$\angle\mathrm{BND}=\beta$ とすると，$\cos\beta=\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

(3)　(1) の正四面体 OPQR と (2) の正四角錐 O′－ABCD を，頂点 O，P，Q がそれぞれ頂点 O′，A，B に重なるように正三角形の面を重ね合わせた立体を考える。ただし，点 R と点 C が，その正三角形の面に関して反対側にあるものとする。

このとき，$\angle\mathrm{RMQ}+\angle\mathrm{BND}=\boxed{\boxed{\text{テ}}}$ である。

したがって，この立体は $\boxed{\boxed{\text{ト}}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\pi}{6}$	① $\dfrac{\pi}{4}$	② $\dfrac{\pi}{3}$	③ $\dfrac{\pi}{2}$
④ $\dfrac{2}{3}\pi$	⑤ $\dfrac{3}{4}\pi$	⑥ $\dfrac{5}{6}\pi$	⑦ π

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪ 九面体	① 八面体	② 七面体	③ 六面体	④ 五面体