ベクトル　入試の基本

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$

(解説)

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(4,\ 3)$ ……①，$\vec{a}-\vec{b}=(2,\ -1)$ ……②

$\dfrac{①+②}{2}$ から　$\vec{a}=(3,\ 1)$　　$\dfrac{①-②}{2}$ から　$\vec{b}=(1,\ 2)$

このとき　$2\vec{a}-3\vec{b}=2(3,\ 1)-3(1,\ 2)=(3,\ -4)$

ゆえに　$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

(2) $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とすると　$(12,\ -2)=x(3,\ 2)+y(1,\ -1)$

ゆえに　$(12,\ -2)=(3x+y,\ 2x-y)$　　よって　$3x+y=12,\ 2x-y=-2$

これを解くと　$x=2,\ y=6$　　ゆえに　$\vec{c}=2\vec{a}+6\vec{b}$

次に，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{c}$ が平行であることから，$\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$ (k は実数) と表される。

よって　$(3,\ 2)+t(1,\ -1)=k(12,\ -2)$　　ゆえに　$(3+t,\ 2-t)=(12k,\ -2k)$

よって　$3+t=12k$ ……③，$2-t=-2k$ ……④

③＋④ から　$5=10k$　　ゆえに　$k=\dfrac{1}{2}$

これを ③ に代入すると　$t=3$

また　$s\vec{a}-\vec{c}=s(3,\ 2)-(12,\ -2)=(3s-12,\ 2s+2)$

$s\vec{a}-\vec{c}$ と $\vec{b}$ が垂直であることから　$\left(s\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0$

よって　$(3s-12)\cdot1+(2s+2)\cdot(-1)=0$　　これを解くと　$s=14$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1}=\dfrac{1}{3}\{(1,\ 2,\ 1)+2(-2,\ 2,\ 4)\}=(-1,\ 2,\ 3)$，

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2-1}=-(1,\ 2,\ 1)+2(-2,\ 2,\ 4)=(-5,\ 2,\ 7)$

また，点 $\mathrm{E}(x,\ 4,\ -2)$ が 3 点 O，A，B を含む平面上にあるとき，

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 $s,\ t$ が存在する。

よって　$(x,\ 4,\ -2)=s(1,\ 2,\ 1)+t(-2,\ 2,\ 4)$

すなわち　$(x,\ 4,\ -2)=(s-2t,\ 2s+2t,\ s+4t)$

ゆえに　$x=s-2t,\ 4=2s+2t,\ -2=s+4t$

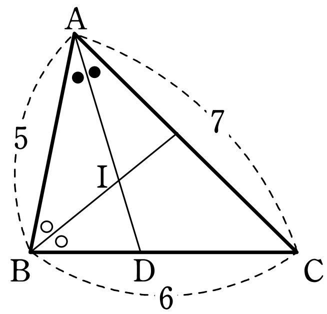
これを解くと　$s=\dfrac{10}{3},\ t=-\dfrac{4}{3},\ x=6$

$\boxed{2}$

(解説)

AD は ∠BAC の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 5 : 7$$



よって　$\overrightarrow{AD}=\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$

また　$BD=6\cdot\frac{5}{5+7}=\frac{5}{2}$

BI は ∠ABD の二等分線であるから

$$AI : ID = BA : BD = 5 : \frac{5}{2} = 2 : 1$$

よって　$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{2+1}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{7}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{18}\overrightarrow{AC}$

また　$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

ゆえに　$\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AG}=\left(\frac{7}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{18}\overrightarrow{AC}\right)-\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{18}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

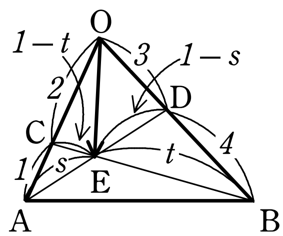
$$=-\frac{1}{18}\overrightarrow{BC}$$

したがって，$\overrightarrow{GI}/\!/\overrightarrow{BC}$ であり　$|\overrightarrow{GI}|=\frac{1}{18}|\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{18}\cdot 6=\frac{1}{3}$

$\boxed{3}$ [改訂版数標準プラン100 センター本試(改作)]

(解説)

(1)　(方針 1)



$\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ から

$$\overrightarrow{OE}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB} \quad \cdots\cdots ①$$

$\overrightarrow{OD}=\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$ から

$$\overrightarrow{OE}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}s\overrightarrow{OB} \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　$\frac{2}{3}t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}=(1-s)\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}s\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ であるから　$\frac{2}{3}t=1-s$，$1-t=\frac{3}{7}s$

これを解くと　$s=\frac{7}{15}$，$t=\frac{4}{5}$　　ゆえに　$\overrightarrow{OE}=\frac{8}{15}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$

(方針 2)

$\overrightarrow{OA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$ から　$\overrightarrow{OE}=\frac{3}{2}x\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OB}$

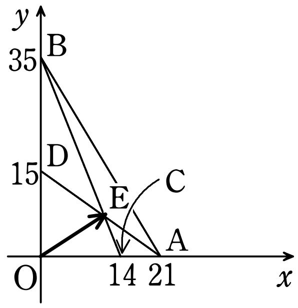
点 E は直線 BC 上の点であるから　$\frac{3}{2}x+y=1 \quad \cdots\cdots ③$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{7}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{7}{3}y\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

点 E は直線 AD 上の点であるから　$x+\dfrac{7}{3}y=1$　……④

③，④ を解くと　$x=\dfrac{8}{15}$，$y=\dfrac{1}{5}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{8}{15}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2)　O を原点とする座標平面において，線分 OA を 2：1 に内分する点が C，線分 OB を 3：4 に内分する点が D となっている。



ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(21,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 35)$ と考えると，(1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{8}{15}(21,\ 0)+\dfrac{1}{5}(0,\ 35)=\left(\dfrac{56}{5},\ 7\right)$

よって，交点 E の座標は　$\left(\dfrac{56}{5},\ 7\right)$

$\boxed{4}$ [改訂版数標準プラン100 センター本試(改作)]

解説

与式から　$-a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$　　よって　$(a+3)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$a>0$ から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{a+3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{a+3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　……①

点 D は直線 AP 上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ $(k>1)$　……②

と表される。

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2k}{a+3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{k}{a+3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　……③

点 D が辺 BC 上にあることから　$\dfrac{2k}{a+3}+\dfrac{k}{a+3}=1$，$\dfrac{2k}{a+3}\geqq 0$，$\dfrac{k}{a+3}\geqq 0$

よって　$k=\dfrac{a+3}{3}$　……④

④ を ③ に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2(a+3)}{3(a+3)}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{a+3}{3(a+3)}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ゆえに　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\dfrac{1}{2}$

点 P が線分 AD を 3：1 に内分するとき　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

よって，② から　$k=\dfrac{4}{3}$　　これは $k>1$ を満たす。

このとき，④ から　$\dfrac{4}{3}=\dfrac{a+3}{3}$　　ゆえに　$a=1$

これは $\dfrac{2k}{a+3}\geqq 0$，$\dfrac{k}{a+3}\geqq 0$ を満たす。

また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から　$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$

ここで，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{7}$，$|\overrightarrow{AC}|=4$ を代入すると

$$(2\sqrt{7})^2=4^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+2^2 \qquad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4$$

さらに，$a=1$ のとき，① から　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

よって　$|\overrightarrow{AP}|^2=\left|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right|^2=\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{16}|\overrightarrow{AC}|^2=1-1+1=1$

$|\overrightarrow{AP}|>0$ から　$|\overrightarrow{AP}|=1$

5

解説

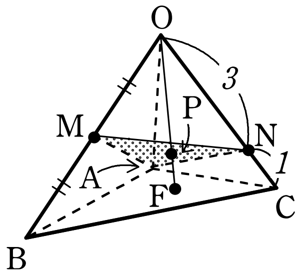
(1)　$\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC})=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+3\cdot\dfrac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3}\right)$

辺 BC を 2：1 に内分する点を D とすると　$\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OD})=\dfrac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OD}}{4}$

すなわち，点 F は線分 AD を 3：1 に内分する点である。

(2)　$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OF}$ $(0<k<1)$ から

$$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \quad \cdots\cdots ①$$



また　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{AM}+m\overrightarrow{AN}$

$$=\overrightarrow{OA}+l(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})+m(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA})$$

$$=\overrightarrow{OA}+l\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+m\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)$$

$$=(1-l-m)\overrightarrow{OA}+\frac{l}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}m\overrightarrow{OC} \quad \cdots\cdots ②$$

4 点 O，A，B，C は同一平面上にないから，①，② より

$$\frac{k}{4}=1-l-m,\ \frac{k}{4}=\frac{l}{2},\ \frac{k}{2}=\frac{3}{4}m \qquad \text{したがって} \quad k=\frac{12}{17},\ l=\frac{6}{17},\ m=\frac{8}{17}$$

よって　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{12}{17}\overrightarrow{OF}=\dfrac{3}{17}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{17}\overrightarrow{OB}+\dfrac{6}{17}\overrightarrow{OC}$

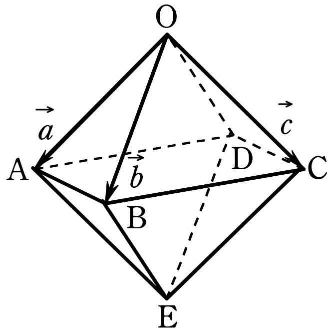
6

解説

(1)　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　（②）

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{c}$　（⑤）



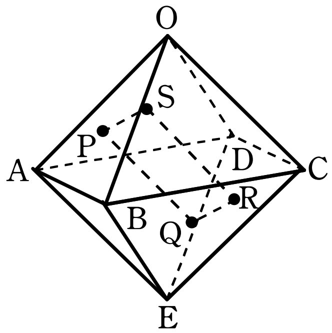
(2)　△OAB，△OBC は 1 辺の長さが 1 の正三角形であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cdot\cos60°=\dfrac{1}{2}$

また，四角形 OAEC は正方形であるから

$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$　　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{3}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$

$=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+(\vec{a}+\vec{c})}{3}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=\dfrac{2}{3}\vec{c}$



$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$

$=\dfrac{\vec{a}+(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})}{3}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=\dfrac{\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}}{3}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\dfrac{2}{3}\vec{c}\cdot\dfrac{\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{2}{9}(\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)$

$=\dfrac{2}{9}\left(0-2\cdot\dfrac{1}{2}+1^2\right)=0$

ここで　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\left|\dfrac{2}{3}\vec{c}\right|=\dfrac{2}{3}$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{PS}}|^2=\left|\dfrac{\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2=\dfrac{1}{9}(|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c})$

$=\dfrac{1}{9}\left(1^2+4\cdot1^2+1^2-4\cdot\dfrac{1}{2}-4\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot0\right)=\dfrac{2}{9}$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{PS}}|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

四角形 PQRS は長方形であるから，その面積は　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PS}}|=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$

$\boxed{7}$

(解説)

(1)　(i)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-3)^2+(6-0)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{5}$

$\mathrm{BC}=\sqrt{(0-3)^2+(6-6)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$

同様に計算すると，$\mathrm{CD}=3\sqrt{5}$，$\mathrm{AD}=3\sqrt{2}$ であり，AB＝CD，BC＝AD である。
また，線分 AC，BD の中点の座標はそれぞれ

$\left(\dfrac{3+0}{2},\ \dfrac{0+6}{2},\ \dfrac{0+0}{2}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{3}{2},\ 3,\ 0\right)$

$\left(\dfrac{3+0}{2},\ \dfrac{6+0}{2},\ \dfrac{3+3}{2}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{3}{2},\ 3,\ 3\right)$

となり，2 つの中点は一致しない。

(ii)　命題「PQ＝RS かつ QR＝PS ならば，4 点 P，Q，R，S でできる図形は平行四辺形 PQRS である」は偽。(反例)　4 点が A，B，C，D のとき
命題「4 点 P，Q，R，S でできる図形が平行四辺形 PQRS であるならば，PQ＝RS かつ QR＝PS である」は真。
よって，条件「PQ＝RS かつ QR＝PS」は，4 点 P，Q，R，S でできる図形が平行四辺形 PQRS であるための必要条件であるが十分条件ではない。　(⓪)

(iii)　4つの条件のうち，必ず4点P，Q，R，Sが同一平面上にあるのは，条件aと条件cだけである。

そのうち，P，Q，R，Sの順に平行四辺形となるのは，条件aだけである。

よって　⓪

(iv)　E$(x,\ y,\ z)$とする。

(iii)から，4点A，B，C，Eでできる図形が平行四辺形ABCEとなる条件は

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}\qquad よって\quad (3-3,\ 6-0,\ 3-0)=(0-x,\ 6-y,\ 0-z)$$

ゆえに　$x=0,\ y=0,\ z=-3$　　すなわち，点Eの座標は　$(0,\ 0,\ -3)$

(2)　平面ACDと直線BHは垂直であるから　$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{DA}$かつ$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{DC}$

よって　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DC}=0$

ここで　$\overrightarrow{BH}=(p-3,\ q-6,\ r-3)$，$\overrightarrow{DA}=(3,\ 0,\ -3)$，$\overrightarrow{DC}=(0,\ 6,\ -3)$

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DA}=0$から　$3(p-3)-3(r-3)=0$　すなわち　$p=r$

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DC}=0$から　$6(q-6)-3(r-3)=0$　すなわち　$q=\dfrac{r+9}{2}$

よって，点Hの座標は　$\left(r,\ \dfrac{r+9}{2},\ r\right)$

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{DH}$から　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DH}=0$　……①

ここで　$\overrightarrow{BH}=\left(r-3,\ \dfrac{r+9}{2}-6,\ r-3\right)=\dfrac{r-3}{2}(2,\ 1,\ 2)$，$\overrightarrow{DH}=\left(r,\ \dfrac{r+9}{2},\ r-3\right)$

$r=3$とすると，$\overrightarrow{BH}=\vec{0}$となり，点Bが平面ACD上にあることになるから，不適。

よって，$r-3\neq 0$であるから，①より　$2r+\dfrac{r+9}{2}+2(r-3)=0$

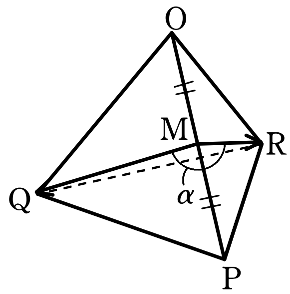
ゆえに　$r=\dfrac{1}{3}$　　点Hの座標は　$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{14}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　(i)　$\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OR}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}=\dfrac{-1}{2}\vec{p}+\vec{r}$

$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OQ}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\dfrac{-1}{2}\vec{p}+\vec{q}$



また，△OPQ，△OQR，△ORPは正三角形であるから，

$\vec{p}$と$\vec{q}$，$\vec{q}$と$\vec{r}$，$\vec{r}$と$\vec{p}$がそれぞれなす角はどれも$\dfrac{\pi}{3}$である。

よって　$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{q}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{p}=2\cdot2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=2$

(ii)　(i)から　$\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{MQ}=\left(-\dfrac{1}{2}\vec{p}+\vec{r}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\vec{p}+\vec{q}\right)=\dfrac{1}{4}|\vec{p}|^2-\dfrac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}-\dfrac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{p}+\vec{q}\cdot\vec{r}$

$$=\frac{1}{4}\cdot2^2-\frac{1}{2}\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2+2=1$$

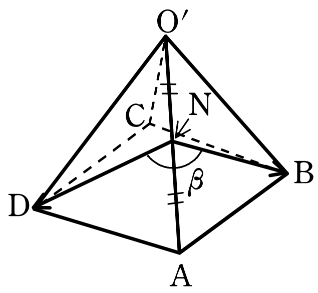
また，△OMRと△OMQは，辺の長さの比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形であるから

$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\sqrt{3}$　　よって　$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MR}}||\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$

(2)　(i)　$\overrightarrow{\mathrm{NB}}=\overrightarrow{\mathrm{NO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'B}}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{O'A}}+\overrightarrow{\mathrm{O'B}}=\dfrac{-1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{ND}}=\overrightarrow{\mathrm{NA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{O'A}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{O'A}}-\overrightarrow{\mathrm{O'B}}+\overrightarrow{\mathrm{O'C}}$

$=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$



また，$\mathrm{AC}=2\sqrt{2}$ より，△O′ACは直角二等辺三角形であるから　$\angle\mathrm{AO'C}=\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

(ii)　(i) から　$\overrightarrow{\mathrm{NB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ND}}=\left(-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)$

$$=-\frac{1}{4}|\vec{a}|^2+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot2^2+\frac{1}{2}\cdot2-\frac{1}{2}\cdot0+\frac{1}{2}\cdot2-2^2+2=-1$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{NB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{ND}}|=\sqrt{3}$ であるから　$\cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{NB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ND}}}{|\overrightarrow{\mathrm{NB}}||\overrightarrow{\mathrm{ND}}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\dfrac{-1}{3}$

(3)　2つの立体を重ね合わせたとき，点Mと点Nは一致する。また，(1)，(2) から

$\cos\alpha+\cos\beta=0$　　よって　$\cos\alpha=-\cos\beta$

ゆえに　$\cos\alpha=\cos(\pi-\beta)$　……①

$\cos\alpha>0$，$\cos\beta<0$ から　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$　……②，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$　……③

③から　$0<\pi-\beta<\dfrac{\pi}{2}$　……④　　①，②，④から　$\alpha=\pi-\beta$

よって　　$\alpha+\beta=\pi$　すなわち　$\angle\mathrm{RMQ}+\angle\mathrm{BND}=\pi$　(⑦)

よって，4点O′(O)，D，A(P)，Rは同一平面上にある。

同様にして，対称性から，4点O′(O)，C，B(Q)，Rも同一平面上にある。

したがって，2つの立体を合わせた立体は，面O′CD，面O′DAR，面ABR，面O′CBR，面ABCDからなる五面体である。　(④)