数学Ⅲ　極限　チャレンジ　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$

解説

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_{n+1}=5b_n$

また　$b_1=a_2-a_1=4-0=4$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 4，公比 5 の等比数列であるから，一般項は　$b_n=4\cdot5^{n-1}$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4\cdot5^{k-1}=0+\frac{4(5^{n-1}-1)}{5-1}=5^{n-1}-1$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(5^{n-1}-1)=\infty$

$\boxed{2}$

解説

与えられた不等式に $h=2$ を代入すると　$(1+2)^n\geqq1+n\cdot2+\frac{n(n-1)}{2}\cdot2^2$

すなわち　$3^n\geqq2n^2+1$

よって　$\frac{3^n}{n}\geqq\frac{2n^2+1}{n}$　　したがって　$0<\frac{n}{3^n}\leqq\frac{n}{2n^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2+1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$

参考　不等式 $(1+h)^n\geqq1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2\ (h>0)$ は，$n\geqq3$ のとき二項定理を用いて証明できる。

$\boxed{3}$

解説

(1)　$S_{2n}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{7}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_{2n-1}=S_{2n}-\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{7}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

(2)　$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{7}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{7}{2}$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{7}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}=\frac{7}{2}$

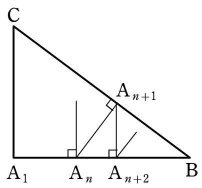
よって，この無限級数は収束し，その和は　$\frac{7}{2}$

$\boxed{4}$

解説

$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{BA}_{n+1}\backsim\triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{BA}_{n+2}$ で，相似比は

$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}:\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}=5:4$



よって　$S_n:S_{n+1}=5^2:4^2=25:16$

ゆえに　$S_{n+1}=\frac{16}{25}S_n$

また　$S_1=\frac{16}{25}\triangle \mathrm{A_1BC}=\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot3=\frac{96}{25}$

したがって，求める面積の総和 S は，初項 $\frac{96}{25}$，

公比 $\frac{16}{25}$ $\left(\left|\frac{16}{25}\right|<1\right)$ の無限等比級数の和で表され　$S=\frac{\frac{96}{25}}{1-\frac{16}{25}}=\frac{32}{3}$

$\boxed{5}$ [リンクⅢ 関西学院大]

解説

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから，$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}-4}{x-1}$ が有限な値をもつためには

$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}-4)=0$　　であることが必要。

よって　$a-4=0$　　ゆえに　$a=4$

このとき　$\lim_{x\to1}\frac{4\sqrt{x}-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{4(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{4(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4}{\sqrt{x}+1}=\frac{4}{1+1}=2$$

となり，与式は有限な値をもつ。

したがって　$a=$ ア4，極限値は イ2

$\boxed{6}$ [リンクⅢ 公立はこだて未来大]

解説

[1]　$-1<x<1$ のとき　$f(x)=\frac{0-0+ax^2+bx}{0+1}=ax^2+bx$

[2]　$x<-1$，$1<x$ のとき　$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{a}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=1-\frac{1}{x}$

[3]　$x=1$ のとき　$f(1)=\frac{a+b}{2}$

[4]　$x=-1$ のとき　$f(-1)=\frac{2+a-b}{2}$

$f(x)$ は $x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$ で，それぞれ連続であるから，$f(x)$ がすべての実数 x で連続であるための条件は，$f(x)$ が $x=\pm1$ で連続であることである。

よって　$\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}f(x)=f(-1)$　かつ　$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)=f(1)$

ゆえに　$2=a-b=\frac{2+a-b}{2}$　かつ　$a+b=0=\frac{a+b}{2}$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$

$\boxed{7}$ [リンクⅢ 山形大]

解説

(1)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=-\alpha(a_{n+1}-a_n)$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_{n+1}=-\alpha b_n$

また　$b_1=a_2-a_1=1$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公比 $-\alpha$ の等比数列であるから，一般項は　$b_n=(-\alpha)^{n-1}$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=0+\sum_{k=1}^{n-1}(-\alpha)^{k-1}=\frac{1-(-\alpha)^{n-1}}{1+\alpha}$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=\frac{1-1}{1+\alpha}=0$ となり，$n=1$ のときも成り立つ。

よって　$a_n=\frac{1-(-\alpha)^{n-1}}{1+\alpha}$

(2)　$0<\alpha<1$ より，$-1<-\alpha<0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{1+\alpha}$

ゆえに，$\frac{1}{1+\alpha}=\frac{2}{3}$ を解いて　$\alpha=\frac{1}{2}$

$\boxed{8}$ [リンクⅢ 山口大]

解説

$r=1+a$ とおくと，$r>1$ より　$a>0$

$a>0$，$n\geqq3$ のとき，$r^n=(1+a)^n>\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$ であるから

$0<\frac{1}{r^n}<\frac{6}{n(n-1)(n-2)a^3}$　　よって　$0<\frac{n^2}{r^n}<\frac{6n}{(n-1)(n-2)a^3}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{(n-1)(n-2)a^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)a^3}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n}=0$

参考　$a>0$，$n\geqq3$ のとき，$r^n=(1+a)^n>\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$ であることの証明

二項定理により　$(1+a)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_ka^k$

$a>0$，$n\geqq3$ のとき，${}_n\mathrm{C}_ka^k>0$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ であるから

$(1+a)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_ka^k>{}_n\mathrm{C}_3a^3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$

$\boxed{9}$

解説

$$S_{2n}=3-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}-\frac{7}{3}+\frac{7}{3}-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-\cdots\cdots-\frac{2n+1}{n}+\frac{2n+1}{n}-\frac{2n+3}{n+1}$$

$$=3-\frac{2n+3}{n+1}$$

$$S_{2n-1}=S_{2n}-\left(-\frac{2n+3}{n+1}\right)=3$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=1$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=3$

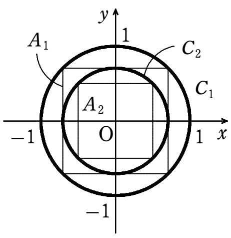
したがって，与えられた無限級数は発散する。

参考　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2n+3}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=-2\neq 0$ であるから，与えられた無限級数は発散する。

10 [リンクⅢ 甲南大]

解説

円 C_n に内接する正方形を A_n とし，A_n をその 1 辺が x 軸に平行になるように作る。



円 C_n の半径を r_n とすると，正方形 A_n の 1 辺の長さは

$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot r_n=\sqrt{2}\,r_n$$

また，正方形 A_n の 1 辺の長さは $2r_{n+1}$ であるから

$$2r_{n+1}=\sqrt{2}\,r_n$$

すなわち　$r_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}r_n$

$r_1=1$ であるから，数列 $\{r_n\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列である。

ゆえに　$r_n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

正方形 A_n の 1 辺の長さは　$2r_{n+1}=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}$

よって　$a_n=\left\{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}\right\}^2=4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

したがって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$

11 [リンクⅢ 岩手大]

解説

$\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1}$ が有限な値をもつためには

$\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+3}-8)=0$ であることが必要。

よって　$a\sqrt{1+3}-8=0$　　すなわち　$2a-8=0$

したがって　$a=4$

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{4\sqrt{x+3}-8}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{4(\sqrt{x+3}-2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{4\{(\sqrt{x+3})^2-2^2\}}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to1}\frac{4}{\sqrt{x+3}+2}=1$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{4\sqrt{x+3}-8}{x-1}$ は有限な値になる。

したがって　$a=4$

そのときの極限値は　1

12 [リンクⅢ 鳥取大]

解説

[1]　$-1<x<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=0$ であるから　$f(x)=-x^2+bx+c$

[2]　$x<-1$，$1<x$ のとき　$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{x}-\frac{1}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}+\frac{c}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{a}{x}$

[3]　$x=-1$ のとき　$f(-1)=\dfrac{-a-1-b+c}{2}$

[4]　$x=1$ のとき　$f(1)=\dfrac{a-1+b+c}{2}$

$f(x)$ は $x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$ において，それぞれ連続である。

したがって，$f(x)$ が x の連続関数となるための条件は，$x=-1$ および $x=1$ で連続であることである。

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}f(x)=f(-1)$　かつ　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)=f(1)$

ゆえに　$-a=-1-b+c=\dfrac{-a-1-b+c}{2}$，　$-1+b+c=a=\dfrac{a-1+b+c}{2}$

したがって　$a=b$，$c=1$

13 [リンクⅢ 藤田保健衛生大]

解説

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{\sum_{k=1}^{n}k^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4}{n^2(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{4}{(1+0)^2}=4$$

14 [リンクⅢ 東京都市大]

解説

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n^n}{n!}\div\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$\dfrac{1}{n}=h$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $h\to0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{h\to0}\frac{1}{(1+h)^{\frac{1}{h}}}=\frac{1}{e}$$

15 [リンクⅢ 京都産業大]

解説

$$a_{n+1}-\frac{9}{2}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{9}{2}\right),\quad a_1-\frac{9}{2}=-\frac{7}{2}$$

ゆえに　$a_n=-\dfrac{7}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{9}{2}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{9}{2}\right\}=\frac{9}{2}$

16 [リンクⅢ 徳島大]

解説

(1)　$a_2=\dfrac{1}{2}\left(a_1+\dfrac{3}{a_1}\right)=\dfrac{1}{2}(1+3)=2$ から　$a_2-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}>0$

一方 $\dfrac{1}{2}-(a_2-\sqrt{3})=\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}>0$ から　$a_2-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$0<a_2-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}$

(2)　$0<a_n-\sqrt{3}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　……(A) とおく。

[1]　$n=2$ のとき

(1) から (A) が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき

(A) が成り立つことを仮定する。

すなわち　$0<a_k-\sqrt{3}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$

$$a_{k+1}-\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{3}{a_k}\right)-\sqrt{3}=\frac{a_k{}^2-2\sqrt{3}\,a_k+3}{2a_k}=\frac{(a_k-\sqrt{3})^2}{2a_k}$$

$a_k>0$，$a_k-\sqrt{3}>0$ から $a_{k+1}-\sqrt{3}>0$ である。

一方　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^k-(a_{k+1}-\sqrt{3})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}-\left\{\dfrac{1}{2}\left(a_k+\dfrac{3}{a_k}\right)-\sqrt{3}\right\}$

仮定より，$a_k-\sqrt{3}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\left\{\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{3}{a_k}\right)-\sqrt{3}\right\}&>\frac{1}{2}(a_k-\sqrt{3})-\frac{(a_k-\sqrt{3})^2}{2a_k}\\&=\frac{1}{2}(a_k-\sqrt{3})\left(1-\frac{a_k-\sqrt{3}}{a_k}\right)\\&=\frac{1}{2}(a_k-\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{a_k}\\&>0\end{aligned}$$

したがって，$a_{k+1}-\sqrt{3}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ である。

以上から，$0<a_{k+1}-\sqrt{3}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ より $n=k+1$ のとき (A) が成り立つ。

[1]，[2] から，n が 2 以上の自然数であるとき (A) が成り立つ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ から，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{3})=0$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$ である。

$\boxed{17}$［リンクⅢ 奈良県立医科大］

解説

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2-n}-(-1)^n}{2^{3n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{9}{2}\left(\frac{1}{24}\right)^n-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\right)^n\right\}=\frac{9}{2}\cdot\frac{\frac{1}{24}}{1-\frac{1}{24}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{8}}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)}=\frac{52}{207}$$

$\boxed{18}$［リンクⅢ 神奈川大］

解説

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2+4k-3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

よって，求める無限級数の和は　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

$\boxed{19}$［リンクⅢ 自治医科大］

解説

初項 1，公比 $x(1-x)$ の無限等比級数が収束するための条件は　　$-1<x(1-x)<1$

$x(1-x)<1$ から　　$x^2-x+1>0$　　　すなわち　　$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

これを満たす x は　　すべての実数　……①

また，$x(1-x)>-1$ から　　$x^2-x-1<0$

これを解いて　　$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　……②

①，②から　　$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって，$a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，$b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ より，$a+b=1$ であるから　　$5|a+b|=5$

$\boxed{20}$［リンクⅢ 関西学院大］

解説

(1)　S_1 が偶数となるのは，1 回目に赤玉を取り出す場合である。

よって　　$p_1=\frac{2}{3}$

S_2 が偶数となるのは，1 回目，2 回目ともに白玉を取り出す場合，または 1 回目，2 回目ともに赤玉を取り出す場合である。

よって　　$p_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$

S_3 が偶数となるのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　S_2 が奇数で，3 回目に白玉を取り出す場合

[2]　S_2 が偶数で，3 回目に赤玉を取り出す場合

[1] が起こる確率は　　$\frac{1}{3}(1-p_2)$

[2] が起こる確率は　　$\frac{2}{3}p_2$

したがって　　$p_3=\frac{1}{3}(1-p_2)+\frac{2}{3}p_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}p_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}=\frac{14}{27}$

(2)　(1) の p_3 の場合と同様に考えると　　$p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)+\frac{2}{3}p_n$

すなわち　　$p_{n+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}p_n$

(3)　$p_{n+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}p_n$ を変形すると　　$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに　　$p_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$

$\boxed{21}$［リンクⅢ 神奈川大］

解説

$x-\pi=t$ とおくと　　$x=t+\pi$

$x\longrightarrow\pi$ のとき　　$t\longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x^2-\pi^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{(x+\pi)(x-\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\pi)}{t(t+2\pi)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{t+2\pi}\right)=-1\cdot\frac{1}{2\pi}=-\frac{1}{2\pi}$$

$\boxed{22}$［リンクⅢ 藤田保健衛生大］

解説

$a\geqq 0$ であるとすると，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b)=\infty$ となり不適。

よって　　$a<0$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{3x^2+2x+1}-(ax+b)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3-a^2)x+2(1-ab)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\left(a+\frac{b}{x}\right)}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\left(a+\frac{b}{x}\right)\right\}=\sqrt{3}-a\ (>0)$ であるから，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b)=0$ のとき　　$3-a^2=0$，$2(1-ab)=0$

これを解いて　　$a=-\sqrt{3}$，$b=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{23}$［リンクⅢ 岩手大］

解説

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{1+\cos x}\right)\right\}=1^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

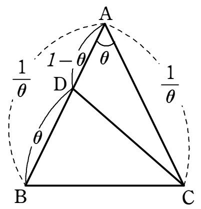
また　　$f(0)=A$

関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ が成り立つ。

よって　　$A=-\frac{1}{2}$

$\boxed{24}$［リンクⅢ 甲南大］

解説



(1)　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{\theta}\cdot\sin\theta=\frac{\sin\theta}{2\theta^2}$

よって　　$S=\theta\triangle\mathrm{ABC}=\frac{\sin\theta}{2\theta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}S=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=\frac{1}{2}$

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ において余弦定理から

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\theta$$
$$=\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{\theta^2}-\frac{2\cos\theta}{\theta^2}=\frac{2(1-\cos\theta)}{\theta^2}$$
$$=\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$\mathrm{BC}>0$ であるから　　$\mathrm{BC}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$　　　よって　　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\mathrm{BC}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}=1$

(3)　$\triangle\mathrm{ACD}$ において余弦定理から

$$\mathrm{CD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\cos\theta$$
$$=\frac{1}{\theta^2}+\frac{(1-\theta)^2}{\theta^2}-\frac{2(1-\theta)\cos\theta}{\theta^2}=\frac{\theta^2+2(1-\theta)(1-\cos\theta)}{\theta^2}$$
$$=1+(1-\theta)\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$\mathrm{CD}>0$ であるから　　$\mathrm{CD}=\sqrt{1+(1-\theta)\left(\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2}$

よって　　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\mathrm{CD}=\lim_{\theta\to+0}\sqrt{1+(1-\theta)\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$