数学Ⅲ　極限　チャレンジ　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$

$a_1=0$，$a_2=4$，$a_{n+2}=6a_{n+1}-5a_n$
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$\boxed{2}$

$h>0$ のとき，不等式 $(1+h)^n \geqq 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2$ が成り立つことを用いて，数列 $\left\{\dfrac{n}{3^n}\right\}$ の極限を求めよ。

$\boxed{3}$

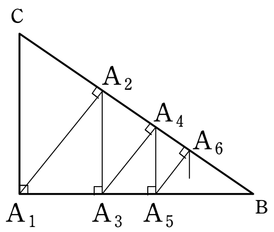
無限級数 $1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}+\cdots\cdots$ について

(1)　第 n 項までの部分和を S_n とするとき，S_{2n}，S_{2n-1} を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$ を示し，この無限級数の和を求めよ。

$\boxed{4}$

$\angle A_1=90°$，$A_1B=4$，$BC=5$，$CA_1=3$ の直角三角形 A_1BC がある。A_1 から対辺 BC に下ろした垂線を A_1A_2，A_2 から A_1B に下ろした垂線を A_2A_3 とし，以下これを無限に続け，点 A_2，A_3，A_4，……，A_n，…… をとる。$\triangle A_nBA_{n+1}$ の面積を S_n とするとき，S_1，S_2，…… の総和 S を求めよ。



$\boxed{5}$ [リンクⅢ 関西学院大]

極限 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}-4}{x-1}$ が有限な値となるような定数 a の値は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，そのときの極限値は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{6}$ [リンクⅢ 公立はこだて未来大]

$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ とする。関数 $f(x)$ がすべての実数 x で連続となるように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{7}$ [リンクⅢ 山形大]

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=(1-\alpha)a_{n+1}+\alpha a_n$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす。

ただし，α は $0<\alpha<1$ を満たす定数である。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{2}{3}$ となる α を求めよ。

$\boxed{8}$ [リンクⅢ 山口大]

n を自然数，$r>1$ とする。$a>0$，$n\geqq 3$ のとき，不等式 $(1+a)^n>\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$ が成り立つことを用いて，極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n}$ を求めよ。

$\boxed{9}$

無限級数 $3-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}-\frac{7}{3}+\frac{7}{3}-\frac{9}{4}+\cdots\cdots+\frac{2n+1}{n}-\frac{2n+3}{n+1}+\cdots\cdots$ の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

$\boxed{10}$ [リンクⅢ 甲南大]

円 C_1：$x^2+y^2=1$ に内接する正方形の面積を a_1 とする。つぎに，この正方形に内接する円 C_2 を作成し，C_2 に内接する正方形の面積を a_2 とする。このような手順にならい，正方形に内接する円 C_n $(n\geqq 3)$ を順次作成し，C_n に内接する正方形の面積を a_n とする。無限級数の和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{11}$［リンクⅢ 岩手大］

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1}$ が有限な値になるように定数 a の値を定め，そのときの極限値を求めよ。

$\boxed{12}$［リンクⅢ 鳥取大］

関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}$ が x の連続関数となるための定数 a，b，c の条件を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

$\boxed{13}$［リンクⅢ 藤田保健衛生大］

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3}$ を求めよ。

$\boxed{14}$［リンクⅢ 東京都市大］

$a_n=\dfrac{n^n}{n!}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ を用いてよい。

15［リンクⅢ 京都産業大］

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+3$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ によって定義されるとき，$\lim_{n\to\infty} a_n=\boxed{}$ である。

16［リンクⅢ 徳島大］

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{3}{a_n}\right)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定められるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$0<a_2-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}$ を示せ。

(2)　n が 2 以上の自然数であるとき，不等式 $0<a_n-\sqrt{3}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ を数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

17［リンクⅢ 奈良県立医科大］

無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2-n}-(-1)^n}{2^{3n+1}}$ を求めよ。

18 [リンクⅢ 神奈川大]

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n-3}$ の和は $\boxed{}$ である。

19 [リンクⅢ 自治医科大]

初項 1，公比 $x(1-x)$ の無限等比級数が収束するための x のとりうる範囲は，$a<x<b$ となる。$5|a+b|$ の値を求めよ。

20 [リンクⅢ 関西学院大]

袋の中に白玉 1 個と赤玉 2 個が入っている。この袋から 1 個の玉を取り出して元に戻す操作を n 回繰り返す。k 回目に白玉が出れば $a_k=1$，赤玉が出れば $a_k=2$ とする。和 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ を S_n とおき，S_n が偶数となる確率を p_n とする。

(1) p_1，p_2，p_3 を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3) p_n を n を用いて表せ。

(4) $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

$\boxed{21}$ [リンクⅢ 神奈川大]

$\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2} = \boxed{}$ である。

$\boxed{22}$ [リンクⅢ 藤田保健衛生大]

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + ax + b\right) = 0$ が成り立つように定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{23}$ [リンクⅢ 岩手大]

関数 $f(x)$ を $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases}$ で定義する。

関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続になるように定数 A の値を定めよ。

$\boxed{24}$ [リンクⅢ 甲南大]

$0<\theta<1$ とする。三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\dfrac{1}{\theta}$，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とする。また，辺 AB を $(1-\theta):\theta$ に内分する点を D とする。

(1) 三角形 BCD の面積を S とする。$\lim\limits_{\theta\to+0} S$ を求めよ。

(2) $\lim\limits_{\theta\to+0} \mathrm{BC}$ を求めよ。

(3) $\lim\limits_{\theta\to+0} \mathrm{CD}$ を求めよ。